

Terminale Spé Maths – Chapitre P-03

LOI DES GRANDS NOMBRES

Table des matières

I	Sommes de variables aléatoires	2
1)	Quelques rappels si nécessaire	2
2)	Définitions	3
3)	Espérance d'une somme de variables aléatoires	4
4)	Variance d'une somme de variables aléatoires	5
5)	Échantillons de n variables aléatoires identiques et indépendantes	5
II	L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	7
1)	L'inégalité de Markov	7
2)	L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	8
III	Loi des grands nombres	9
1)	L'inégalité de concentration	9
2)	Loi faible des grands nombres	9

I Sommes de variables aléatoires

1) Quelques rappels si nécessaire

DÉFINITIONS

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} .

EXEMPLE

On lance un dé cubique équilibré. Si le 6 sort, on gagne 5 euros, sinon on perd 1 euro.
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $X(1) = -1, X(2) = -1, \dots, X(6) = 5$.

DÉFINITIONS

Soit n un entier naturel et soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .
 On pose, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n , $p_i = P(X = x_i)$.

- L'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$.
- La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

REMARQUES

- On peut, par définition, également écrire que $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
- La formule de König-Huyghens vue en classe de Première donne une autre expression de la variance :
 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

PROPRIÉTÉS

admises

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire. On peut obtenir deux autres écritures possibles de la variance de X :

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Formule de König-Huyghens)
- $V(X) = E((X - E(X))^2)$ (Par définition)

DÉMONSTRATION

- Supposons que X prenne les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 = E(X^2); \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i = E(X) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

$$\text{Donc } V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

- Par définition, la variance de X est la moyenne des carrés des écarts de X à sa moyenne, d'où le résultat.
- On peut le démontrer algébriquement (voir dans la suite du cours).

DÉFINITIONS

- Deux événements A et B sont **incompatibles** $\iff A \cap B = \emptyset \iff P(A \cap B) = 0$.
- Deux événements A et B sont **indépendants** $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

PROPRIÉTÉ

admise

Soient A et B deux événements. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2) Définitions

DÉFINITIONS

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et soit a un réel.

- La variable aléatoire $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes de toutes les valeurs possibles de X et de Y .
- La variable aléatoire aX est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les valeurs de X multipliées par le réel a .

EXEMPLES

On lance deux dés équilibrés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4, et l'autre cubique numéroté de 1 à 6. On appelle X et Y les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

- $X + Y$ est la variable aléatoire égale à la somme des deux dés.

Les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Les valeurs prises par Y sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

Donc les valeurs prises par $X + Y$ sont 2 ; 3 ; ... ; 10.

Calculer $P(X + Y = 2)$ et $P(X + Y = 3)$:

$$\begin{aligned} P(X + Y = 2) &= P((X, Y) = (1, 1)) \\ &= P((X = 1) \cap (Y = 1)) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 1) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ sont des variables aléatoires indépendantes)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{24}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X + Y = 3) &= P(\{(X, Y) = (1, 2)\} \cup \{(X, Y) = (2, 1)\}) \\ &= P((X, Y) = (1, 2)) + P((X, Y) = (2, 1)) \quad (*) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 1) \quad (**) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

(*) : car les événements $(X, Y) = (1, 2)$ et $(X, Y) = (2, 1)$ sont incompatibles.

(**) : car les variables X et Y sont indépendantes.

- $2X$ est la variable aléatoire égale au double du résultat obtenu par le premier dé.

Les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Donc les valeurs prises par $2X$ sont : 2 ; 4 ; 6 ; 8.

Calculer $P(2X = 6)$:

$$P(2X = 6) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$$

REMARQUES

- **Attention** : si X est une variable aléatoire, alors la variable aléatoire $X + X$ n'est pas égale à la variable aléatoire $2X$ ($X + X \neq 2X$)

Exemple, si X est une variable aléatoire prenant comme valeurs 1 ; 2 et 3, alors $X + X$ prend comme valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6, alors que $2X$ prend comme valeurs 2 ; 4 et 6.

- On peut généraliser la somme de variables aléatoires à n variables (où n est un entier naturel non nul). Cf. 4)

3) Espérance d'une somme de variables aléatoires

PROPRIÉTÉ

admise

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

EXEMPLE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,2$.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $m = 100$ et $q = 0,5$.

Les valeurs prises par X sont tous les entiers compris entre 0 et 200.

Les valeurs prises par Y sont tous les entiers compris entre 0 et 100.

Donc les valeurs prises par $X + Y$ sont tous les entiers compris entre 0 et 300.

On a de plus $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = np + mq = 200 \times 0,2 + 100 \times 0,5 = 90$.

Attention : X et Y suivent une loi binomiale mais pas $X + Y$.

REMARQUE

On peut désormais retrouver le résultat $V(X) = E((X - E(X))^2)$:

$$\begin{aligned} E((X - E(X))^2) &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X)^2). \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \quad (\text{car } E(X) \text{ est une constante}) \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= V(X) \quad (\text{Formule de König-Huyghens}). \end{aligned}$$

4) Variance d'une somme de variables aléatoires**PROPRIÉTÉ****admise**

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, en supposant que les variables X et Y sont indépendantes, on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = np(1-p) + mq(1-q) = 200 \times 0,2 \times 0,8 + 100 \times 0,5 \times 0,5 = 57.$$

On a alors $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{57}$ (écart-type de $X + Y$)

5) Échantillons de n variables aléatoires identiques et indépendantes**DÉFINITIONS**

Soient n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire définie sur un univers Ω .

• Un **échantillon de taille n de la loi de probabilité de X** est une liste (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes et identiques et suivant toutes la loi de probabilité de X .

• La **variable aléatoire somme** S_n d'un échantillon de taille n de la loi de X est définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

• La **variable aléatoire moyenne** M_n d'un échantillon de taille n de la loi de X est définie par

$$M_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul.

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω .

Soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de X .

On a alors :

$$E(S_n) = nE(X)$$

$$V(S_n) = nV(X)$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$$

DÉMONSTRATION

• D'après la linéarité de l'espérance vu précédemment, on a :

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

Or toutes les variables X_i suivent la même loi que X et ont donc la même espérance que X .

Donc $E(S_n) = E(X) + E(X) + \dots + E(X) = nE(X)$.

• De la même manière, les variables X_i étaient indépendantes, on a :

$$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

Or toutes les variables X_i suivent la même loi que X et ont donc la même variance que X .

Donc $V(S_n) = V(X) + V(X) + \dots + V(X) = nV(X)$.

• $V(S_n) = nV(X)$, et $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)}$.

Donc $\sigma(S_n) = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n} \times \sqrt{V(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul.

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω .

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X .

On a alors :

$$E(M_n) = E(X)$$

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

DÉMONSTRATION

• $E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$.

• On rappelle un résultat sur la variance : pour tout réel a , $V(aX) = a^2V(X)$. Ainsi :

$$V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}.$$

• Enfin, $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

II L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1) L'inégalité de Markov

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un réel strictement positif. Alors :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

REMARQUES

- **Interprétation de cette propriété :** ce résultat signifie que la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.
- Si $a \leq E(X)$, l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt, car alors $\frac{E(X)}{a} \geq 1$, et donc on obtient $P(X \geq a) \leq 1$, ce qui est évident.

DÉMONSTRATION

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives (ou nulles) dont on note x_i les n valeurs pour l'entier i entre 1 et n .

Par définition de l'espérance, on a $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$.

Séparons cette somme en deux sommes en considérant les valeurs x_i supérieures ou égales à a , et celles strictement inférieures à a .

On a donc $E(X) = \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i)$.

Pour tout entier i compris entre 1 et n , on sait que $x_i \geq 0$ (puisque X est positive ou nulle), et $P(X = x_i) \geq 0$ (par définition d'une probabilité), donc $\sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) \geq 0$.

On en déduit que $E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$. (*)

De plus, dans cette partie de la somme, pour tout entier i compris entre 1 et n , $x_i \geq a$.

Donc en multipliant chaque membre de cette inégalité par $P(X = x_i)$ (positif ou nul), on a : $x_i P(X = x_i) \geq a P(X = x_i)$.

Donc par somme, $\sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i)$, d'où $E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i)$ d'après (*).

Or $\sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = a P(X \geq a)$.

Par conséquent, $E(X) \geq a P(X \geq a)$.

Puisque $a > 0$, on obtient finalement $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

EXEMPLE

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 1.

D'après l'inégalité de Markov, on a alors $P(X \geq 100) \leq \frac{1}{100}$, soit $P(X \geq 100) \leq 0,01$.

Autrement dit, une variable aléatoire positive dont l'espérance vaut 1 a au plus une chance sur 100 de dépasser 100.

2) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire et soit a un réel strictement positif. Alors :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

REMARQUES

- **Interprétation de cette propriété :** ce résultat signifie que la probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins a de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que a est grand.
- On dit que l'intervalle $[E(X) - a; E(X) + a]$ est un **intervalle de fluctuation** de X .
- Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev font partie de ce qu'on appelle les inégalités de « concentration ».

DÉMONSTRATION

Comme $a > 0$, on a $|X - E(X)| \geq a \iff (X - E(X))^2 \geq a^2$.

De plus, la variable $(X - E(X))^2$ est positive ou nulle.

On peut donc appliquer l'inégalité de Markov à la variable $(X - E(X))^2$ et au réel a^2 .

Ainsi, $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$.

Or par définition, $E((X - E(X))^2) = V(X)$, donc $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$,

et on a bien $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

EXEMPLE

Soit X une variable aléatoire et t un réel tel que $t = 2\sigma(X)$.

Alors $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \leq \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$, soit $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$.

Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le double de son écart-type est inférieure à 0,25.

III Loi des grands nombres

1) L'inégalité de concentration

THÉORÈME

admis

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X .

Autrement dit, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi de probabilité (celle de X). Alors pour tout réel a strictement positif,

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$$

Cette inégalité est appelée **l'inégalité de concentration**.

EXEMPLE

On effectue n lancers successifs supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

On associe à chaque tirage i la variable aléatoire X_i , prenant comme valeur 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile.

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenu, et on pose $M_n = \frac{S_n}{n}$.

On a, pour tout entier i compris entre 1 et n : $E(X_i) = \frac{1}{2}$ et $V(X_i) = \frac{1}{4}$.

Pour $n = 10\,000$ et $a = 0,01$, l'inégalité de concentration donne :

$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{\frac{1}{4}}{10\,000 \times 0,01^2}, \text{ donc } P\left(\left|M_n - \frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Ainsi, pour 10 000 lancers, la probabilité que la proportion de pile obtenue s'écarte de plus d'un centième de $\frac{1}{2}$ est inférieure à $\frac{1}{4}$.

2) Loi faible des grands nombres

PROPRIÉTÉ

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors pour tout réel a strictement positif :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

DÉMONSTRATION

On applique l'inégalité de concentration à la variable aléatoire M_n .

Ainsi, $0 \leq P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(X)}{na^2} = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$.

EXEMPLE

On considère une urne contenant 5 boules noires et 3 boules blanches. On souhaite estimer la probabilité d'obtenir au moins six boules noires sur un ensemble de dix tirages avec remise.

Pour simuler cette expérience plusieurs fois, on a écrit un programme en Python.

En effectuant 100 000 épreuves de dix tirages, on obtient une proportion $p \approx 0,6943$.

Sachant que la variance est 2,344, déterminer la probabilité de se tromper de plus d'un centième.

Correction :

D'après la loi des grands nombres, la probabilité cherchée est proche de 0,6943.

La probabilité de s'écarter de plus de $a = 0,01$ est donc inférieure à $\frac{V(X)}{n \times a^2}$, soit 0,2344.