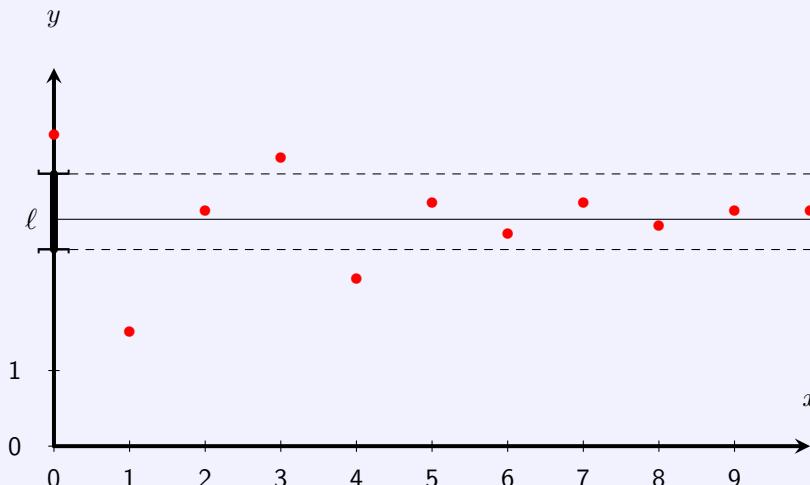


# LIMITES DE SUITES



## Table des matières

I	<b>Limite finie ou infinie d'une suite</b>	2
1)	Limite finie : suite convergente . . . . .	2
2)	Limite infinie . . . . .	3
II	<b>Opérations sur les limites</b>	4
1)	Limite d'une somme . . . . .	4
2)	Limite d'un produit . . . . .	4
3)	Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$ . . . . .	4
4)	Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . . . . .	4
5)	Formes indéterminées . . . . .	5
III	<b>Limites et comparaison</b>	6
1)	Théorème de comparaison . . . . .	6
2)	Théorème d'encadrement . . . . .	6
IV	<b>Convergence des suites monotones</b>	7
1)	Suite majorée, minorée, bornée . . . . .	7
2)	Différents théorèmes . . . . .	7
V	<b>Limite d'une suite géométrique</b>	8

# I Limite finie ou infinie d'une suite

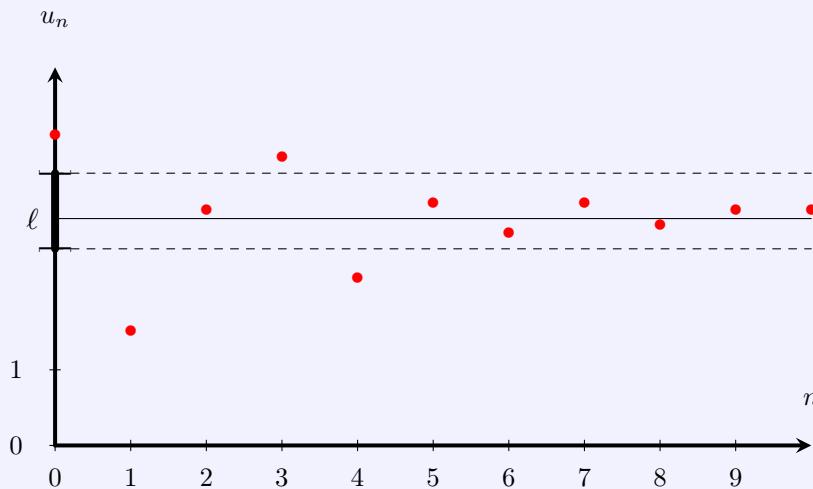
## 1) Limite finie : suite convergente

### DÉFINITION

Soit  $u$  une suite et  $l$  un réel.

On dit que  $u_n$  tend vers  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite  $u$  converge vers  $l$  et que  $l$  est la limite de  $u$ , et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .



### EXEMPLE

Les suites de référence  $n \mapsto \frac{1}{n^2}$ ,  $n \mapsto \frac{1}{n^3}$ ,  $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$  convergent vers 0.

### DÉMONSTRATION

**Démonstration pour  $n \mapsto \frac{1}{n^2}$  :**

Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant 0 : il existe alors deux réels  $\lambda < 0$  et  $\mu > 0$  tel que  $I = ]\lambda; \mu[$ .

$I$  contient 0 donc  $\lambda < 0$ .

Donc  $\lambda < \frac{1}{n^2} < \mu \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n^2} < \mu$  (car  $\frac{1}{n^2}$  est strictement positif pour tout  $n$ )

$\Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\mu}$  (car la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ )

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  (car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est strictement croissante sur  $0; +\infty[$ )

Donc à partir du premier rang strictement supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ,  $I$  contient tous les  $\frac{1}{n^2}$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ .

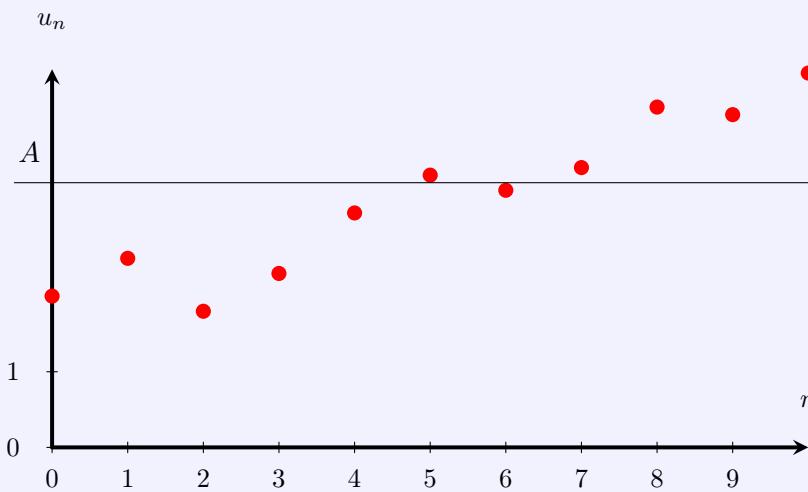
## 2) Limite infinie

### DÉFINITION

Soit  $u$  une suite.

On dit que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle ouvert de la forme  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite  $u$  diverge vers  $+\infty$  et que  $+\infty$  est la limite de  $u$ , et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .



### REMARQUE

On définit de même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  avec un intervalle ouvert de la forme  $]-\infty; A[$ .

### EXEMPLES

Les suites de référence  $n \mapsto n$ ,  $n \mapsto n^2$ ,  $n \mapsto n^3$ ,  $n \mapsto \sqrt{n}$  tendent vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### DÉMONSTRATION

Démonstration pour  $n \mapsto \sqrt{n}$  :

Soit  $A$  un réel.

Si  $A < 0$ , alors on a bien  $\sqrt{n} > A$ .

Si  $A > 0$ , alors  $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$  (car la fonction carrée est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ )

Donc à partir du premier rang strictement supérieur à  $A^2$ ,  $I$  contient tous les  $\sqrt{n}$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ .

### REMARQUE

Certaines suites n'admettent pas de limite. On dit alors que la suite  $u$  **diverge** ou **est divergente**.

**Exemple** : la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = (-1)^n$ .

## II Opérations sur les limites

### 1) Limite d'une somme

Si $u$ a pour limite	$\ell$	$\ell$ ou $+\infty$	$\ell$ ou $-\infty$	$+\infty$
Si $v$ a pour limite	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $u+v$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	?????

#### REMARQUE

les rôles de  $u$  et  $v$  peuvent être échangés.

### 2) Limite d'un produit

Si $u$ a pour limite	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\infty$	0
Si $v$ a pour limite	$\ell'$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
Alors $uv$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$\infty$	$\infty$	?????

#### REMARQUES

- les rôles de  $u$  et  $v$  peuvent être échangés.
- On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

### 3) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Si $u$ a pour limite	$\ell$	$\ell$	$\infty$	$\infty$
Si $v$ a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\infty$	$\ell \neq 0$	$\infty$
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\infty$	?????

#### REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

### 4) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Si $u$ a pour limite	$\ell \neq 0$ ou $\infty$	0
Si $v$ a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite	$\infty$	?????

#### REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

## 5) Formes indéterminées

Les quatre cases **?????** dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut déterminer la limite de manière générale :

- Forme indéterminée  $+\infty - \infty$  :

$u_n$	$v_n$	$u_n + v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$
$2n + 1$	$-n$	$n + 1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$n^2 + 1$	$-n^2$	$1$	$+\infty$	$-\infty$	$1$
$n + \frac{1}{n}$	$-n$	$\frac{1}{n}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$

- Forme indéterminée  $\infty \times 0$  :

$u_n$	$v_n$	$u_n \times v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$
$n^2$	$\frac{1}{n}$	$n$	$+\infty$	$0$	$+\infty$
$n$	$-\frac{1}{n^2}$	$-\frac{1}{n}$	$+\infty$	$0$	$0$
$5n^3$	$\frac{2}{n^3}$	$10$	$+\infty$	$0$	$10$

- Forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$  :

$u_n$	$v_n$	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \div v_n)$
$n$	$3n$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{3}$
$2n^2$	$-n$	$-2n$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$n$	$2n^3$	$\frac{1}{2n^2}$	$+\infty$	$+\infty$	$0$

- Forme indéterminée  $\frac{0}{0}$  :

$u_n$	$v_n$	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \div v_n)$
$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$	$3$	$0$	$0$	$3$
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$n$	$0$	$0$	$+\infty$

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent.

Pour les mémoriser, on les note «  $\infty - \infty$  », «  $0 \times \infty$  », «  $\frac{\infty}{\infty}$  » et «  $\frac{0}{0}$  », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction ni apparaître sur une copie !**

### EXERCICE

Soit  $u_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{n+1}$  et  $v_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$ .

Déterminer les limites des suites  $u$  et  $v$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## III Limites et comparaison

### 1) Théorème de comparaison

#### THÉORÈME

Soit  $u$  et  $v$  deux suites. Si pour tout entier naturel  $n$  supérieur à un certain entier naturel  $n_0$ ,

- $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

#### DÉMONSTRATION

- Il s'agit de prouver que tout intervalle ouvert de la forme  $]A; +\infty[$ , avec  $A$  un réel quelconque, contient tous les termes de la suite  $v$  à partir d'un certain rang.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  donc par définition, l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang. Notons  $p$  ce rang.

On sait aussi qu'à partir du rang  $n_0$ ,  $u_n \leq v_n$ . Notons alors  $N$  le plus grand des deux entiers  $n_0$  et  $p$ . A partir du rang  $N$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes  $u_n$  et donc *a fortiori* tous les termes  $v_n$  puisque l'inégalité  $u_n \leq v_n$  est alors vérifiée.

Ceci étant vrai quel que soit le réel  $A$ , on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

- Démonstration analogue. (*A faire chez soi en exercice*)

#### EXEMPLE

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n + (-1)^n$ .

1. Justifier que la suite n'est pas monotone.
2. Déterminer sa limite quand  $n$  tend vers  $\infty$ .

### 2) Théorème d'encadrement

#### THÉORÈME

admis

Soit  $u$ ,  $v$  et  $w$  trois suites telles que :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ ,
  - $v$  et  $w$  convergent vers la même limite  $l$ ,
- alors la suite  $u$  converge et sa limite est  $l$ .

#### REMARQUE

Le théorème d'encadrement ne s'applique qu'à des suites **convergentes** ; dans le cas où les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  divergent vers l'infini, le théorème de comparaison suffit.

#### EXEMPLE

Étudier la convergence de la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $u_n = \frac{2 + 3 \cos n}{n}$ .

## IV Convergence des suites monotones

### 1) Suite majorée, minorée, bornée

#### DÉFINITION

- On dit qu'une suite  $u$  est **majorée** si il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- On dit qu'une suite  $u$  est **minorée** si il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .
- On dit qu'une suite est **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

#### REMARQUE

Si une suite  $u$  admet un majorant (resp. minorant), alors ce majorant (resp. minorant) n'est pas unique :

- Si  $u$  est majorée par un réel  $M$ , alors elle est majorée par tout réel supérieur à  $M$ .
- Si  $u$  est minorée par un réel  $m$ , alors elle est minorée par tout réel inférieur à  $m$ .

#### REMARQUE

- Si une suite admet un maximum, alors ce maximum est le plus petit des majorants.
- Si une suite admet un minimum, alors ce minimum est le plus grand des minorants.

#### EXEMPLES

- $u_n = 3 - \sqrt{n}$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 3$  donc la suite  $u$  est majorée par 3 (et donc par n'importe quel réel supérieur ou égal à 3).
- $u_n = \frac{1}{n}$ . La suite  $u$  est bornée car, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ . (Elle est minorée par 0 - et tout nombre inférieur à 0, et majorée par 1 - et tout nombre supérieur à 1)

### 2) Différents théorèmes

#### THÉORÈME

admis

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

#### REMARQUE

Attention, ce théorème prouve uniquement l'existence d'une limite finie, mais ne permet pas de déterminer la valeur de cette limite !

#### THÉORÈME

- Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
- Toute suite décroissante non minorée tend vers  $-\infty$ .

## DÉMONSTRATION

- Soit  $u$  une suite croissante non majorée et  $A$  un réel.  
 $u$  est non majorée, donc il existe un entier naturel  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ .  
 $u$  est croissante, donc  $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > A$ .  
 Donc à partir du rang  $n_0$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes  $u_n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- *Démonstration analogue.*

## EXERCICE

Soit  $u_n = 2^n - n$ .

1. Montrer que la suite  $u$  est croissante.
2. On admet que  $u$  est non majorée. Écrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel  $u_n > A$ ,  $A$  étant un réel donné.

### Correction :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1 \geq 0$  pour  $n \geq 0$  donc  $u$  est croissante.
2. Pour  $A = 10$ , on obtient  $n = 4$ . Pour  $A = 50$ , on obtient  $n = 6$ . Pour  $A = 10^6$ , on obtient  $n = 20$ .

```

1 def u(n):
2     return 2**n-n
3
4 def seuil(A):
5     n=0
6     while u(n)<A:
7         n=n+1
8     return n

```

## THÉORÈME

- Si une suite  $u$  est croissante et admet pour limite  $l$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq l$ .
- Si une suite  $u$  est décroissante et admet pour limite  $l$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq l$ .

## DÉMONSTRATION

- Soit  $u$  une suite croissante et qui converge vers un réel  $l$ .

*Raisonnement par l'absurde :*

Supposons qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > l$  et posons  $I = ]-\infty; u_{n_0}[$ .

$I$  est un intervalle ouvert contenant  $l$ , donc il contient tous les termes de la suite  $u$  à partir d'un certain rang  $n_1 : \forall n \geq n_1, u_n < u_{n_0}$

Or  $u$  étant croissante, on a  $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$  : impossible !

- *Démonstration analogue.*

## V Limite d'une suite géométrique

Soit  $u$  une suite géométrique définie sur  $\mathbb{N}$ , de raison  $q$  non nulle.

Alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$ .

D'après les théorèmes sur les opérations et les limites, pour déterminer le comportement de la suite  $u$  à l'infini, il

suffit de connaître celui de la suite  $v$  définie par  $v_n = q^n$ .

## THÉORÈME

Soit  $q$  un réel.

Si  $q \leq -1$  : la suite  $(q^n)$  n'a pas de limite.

Si  $-1 < q < 1$  : la suite  $(q^n)$  converge vers 0.

Si  $q = 1$  : la suite  $(q^n)$  converge vers 1.

Si  $q > 1$  : la suite  $(q^n)$  diverge vers  $+\infty$ .

## DÉMONSTRATION

**Démonstration dans le cas où  $q > 1$ , exigible BAC !! :**  $q > 1$ . Posons alors  $q = 1 + a$  avec  $a > 0$ .

**a) Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$ .**

Soit  $P_n$  : «  $(1+a)^n \geq 1+na$  » :

- **Initialisation :**  $(1+a)^0 = 1$  et  $1+0 \times a = 1$  donc  $P_0$  est vraie.

- **Héritéité :** Supposons  $P_n$  vraie pour un certain  $n$  fixé et montrons alors que  $P_{n+1}$  est vraie.

Hypothèse de récurrence :  $P_n$  : «  $(1+a)^n \geq 1+na$  »

Ce que l'on veut montrer :  $P_{n+1}$  : «  $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$  »

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$$

Or  $(1+a)^n \geq 1+na$  (Hypothèse de récurrence)

Donc  $(1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)(1+a)$  (car  $1+a > 0$ )

$$\text{Donc } (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$$

Donc  $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$  (car  $na^2 \geq 0$ ).

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

- **Conclusion :** La proposition  $P_n$  est vraie au rang 0, de plus elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$

**b) Retour à la démo :**

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1+na$  avec  $a > 0$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+na) = +\infty$  donc d'après le théorème de comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

## EXEMPLES

1. Déterminer la limite de la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -5(\sqrt{3})^n$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = -3(1 - \sqrt{2})^n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $w$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$
4. La suite  $z$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $z_n = \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$  a-t-elle une limite ?

**Correction :**

1.  $\sqrt{3} > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
2.  $1 - \sqrt{2} \in ]-1; 1[$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2})^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ .  
Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \frac{3^{n+1}}{(-2)^n} = 3 \times \frac{3^n}{(-2)^n} = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ .  
Or  $-\frac{3}{2} < -1$  donc  $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$  n'a pas de limite, donc la suite  $z$  non plus.