SUITES : exercices

Exercice 1 – Utilisation du tableur

Tabuler sur la calculatrice les premiers termes des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 2n + 1$.
2. Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_{n+1} &= 3v_n + 1 \end{cases}$
3. Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} w_1 &= 5 \\ w_{n+1} &= 2w_n + n + 3 \end{cases}$

Exercice 2 – Algorithme de seuil

En 2015, on estime à 3 200 le nombre de tigres sauvages dans le monde.
On peut craindre que ce nombre continue dans les années à venir à diminuer de 3% par an.
Pour tout entier naturel n, on note T_n le nombre de tigres sauvages en l'an $2015 + n$ selon ce modèle.

1. Déterminer l'expression de T_{n+1} en fonction de T_n, pour tout entier naturel n.
2. Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. On s'intéresse dans cette question à l'algorithme suivant :

```
n ← 0
T ← 3200
TantQue T ⩾ 2700 Faire
  | T ← 0,97T
  | n ← n+1
FinTantQue
Afficher n
```

   (a) Faire fonctionner à la main cet algorithme et interpréter le résultat.
   (b) Comment modifier cet algorithme afin qu'il affiche le nombre d'années avant que le nombre de tigres sauvages soit divisé par 2 ?
   (c) Comment modifier cet algorithme afin qu'il affiche le nombre d'années avant que le nombre de tigres sauvages soit inférieur à un seuil saisi par l'utilisateur ?

Exercice 3 – Algorithme de seuil - bis

Nicolas a gagné 200 000 euros à la loterie. Chaque mois, il dépense 5% de la somme restante.
Soit S_n la somme restante après n mois, en milliers d'euros, pour tout entier naturel n. On a donc $S_0 = 200$.

1. Déterminer l'expression de S_{n+1} en fonction de S_n, pour tout entier naturel n.
2. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le nombre de mois qui s'écouleront avant que la somme restante soit inférieure à 10% de la somme gagnée initialement.

Exercice 4 – Suite arithmético-géométrique 1

En 2018, on évalue la population d'une ville à 10 000 habitants. Chaque année, 10% de la population quitte la ville, et 500 personnes viennent s'y installer.
On modélise la population de cette ville par une suite u définie sur $\mathbb{N}$.

1. Préciser u_0, puis calculer la population en 2019.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,9u_n + 500$.
3. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. Peut-on calculer facilement à la main la population en 2040 ?
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 5000$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer alors la population de la ville en 2040.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5 – Suite arithmético-géométrique 2

Le solde d'un compte épargne au 1[er] Janvier de l'année $2015+n$ peut être modélisé par la suite u définie par $u_0 = 5000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,03u_n + 600$.

1. Combien d'argent contient le compte épargne en 2015 ?
2. Déterminer la suite constante vérifiant la relation de récurrence de (u_n). On posera α cette constante.
3. Démontrer que la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
5. Combien le compte épargne contiendra-t-il en 2030 ?

Exercice 6 – Suite arithmético-géométrique 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 6$.
Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 – Limites

Déterminer les limites de suites suivantes par :

$$a_n = (1-2n)(n^2+3) \qquad b_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \qquad c_n = \frac{1}{1-2n^2}$$

$$d_n = n^2 - 4n \qquad g_n = -2n^3 + 5n^2 - 4n + 1 \qquad h_n = \frac{n^2-2n+3}{4n^2+5}$$

$$i_n = \left(-1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)(2n+4) \qquad j_n = \frac{-3n+2}{n^2+1} \qquad k_n = 2 - \frac{n^2}{\sqrt{n}}$$

$$l_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \qquad m_n = 2 - (1-n^2)\sqrt{n} \qquad p_n = \frac{2n-1}{n^2}$$

$$q_n = -84\left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad r_n = 5(\sqrt{2})^n \qquad s_n = 2^{n+1}$$

$$t_n = \frac{2^n+3^n}{5^n} \qquad u_n = \frac{2^n-7^n}{5^n} \qquad v_n = (-3)^n$$

Exercice 8 – Limites, le retour

A l'aide de théorèmes du cours, déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = n^2 + \cos(n) \qquad b_n = \frac{\sin n}{n^2}$$