B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

La page 8 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points) commun à tous les candidats

Une étude statistique a été menée dans une grande ville de France entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2010 afin d'évaluer la proportion des ménages possédant une connexion internet fixe.

Au 1er janvier 2000, un ménage sur huit était équipé d'une connexion internet fixe et, au 1er janvier 2010, 64 % des ménages l'étaient.

Suite à cette étude, cette proportion a été modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{1 + k\mathrm{e}^{-at}} \ ,$$

où k et a sont deux constantes réelles positives et la variable t désigne le temps, compté en années, écoulé depuis le 1er janvier 2000.

1. Déterminer les valeurs exactes de k et de a pour que $g(0) = \frac{1}{8}$ et $g(10) = \frac{64}{100}$.

2. Dans la suite, on prendra $k = 7$ et $a = 0{,}25$. La fonction g est donc définie par :

$$g(t) = \frac{1}{1 + 7\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{4}\right)}} \ .$$

a. Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Selon cette modélisation, peut-on affirmer qu'un jour, au moins 99% des ménages de cette ville seront équipés d'une connexion internet fixe ? Justifier la réponse.

3. a. Donner, au centième près, la proportion de foyers, prévue par le modèle, équipés d'une connexion internet fixe au 1er janvier 2018.

b. Compte tenu du développement de la téléphonie mobile, certains statisticiens pensent que la modélisation par la fonction g de l'évolution de la proportion de ménages possédant une connexion internet fixe doit être remise en cause.

Au début de l'année 2018 un sondage a été effectué. Sur 1000 foyers, 880 étaient équipés d'une connexion fixe. Ce sondage donne-t-il raison à ces statisticiens sceptiques ?
(On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.)

Exercice 2 (5 points) commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans **C** l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_B = 2i$.

a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

b. Faire une figure et placer les points A et B.

c. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

3. On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.

a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.

b. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$ puis de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OF})$.

c. Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.

d. En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) .$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} ,$$

et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} .$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (6 points) commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Il est attribué 1,5 point par réponse correcte.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse incorrecte.

<u>Question 1</u>

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$, et le plan (P) d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.

On peut affirmer que :

Réponse A : la droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
Réponse B : la droite (D) est incluse dans le plan (P).
Réponse C : la droite (D) et le plan (P) se coupent au point de coordonnées $(4; -5;\ 4)$.
Réponse D : la droite (D) et le plan (P) sont orthogonaux.

<u>Question 2</u>

Dans le rayon informatique d'une grande surface, un seul vendeur est présent et les clients sont nombreux.
On admet que la variable aléatoire T, qui, à chaque client, associe le temps d'attente en minutes pour que le vendeur soit disponible, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Le temps d'attente moyen est de 20 minutes.
Sachant qu'un client a déjà attendu 20 minutes, la probabilité que son attente totale dépasse une demi-heure est :

Réponse A : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ **Réponse B :** $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ **Réponse C :** $1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ **Réponse D :** $1 - \mathrm{e}^{10\lambda}$

<u>Question 3</u>

Une usine fabrique des balles de tennis en grande quantité. Pour être conforme au règlement des compétitions internationales, le diamètre d'une balle doit être compris entre 63,5 mm et 66,7 mm.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque balle produite, associe son diamètre mesuré en millimètres.
On admet que D suit une loi normale de moyenne 65,1 et d'écart type σ.
On appelle P la probabilité qu'une balle choisie au hasard dans la production totale soit conforme.

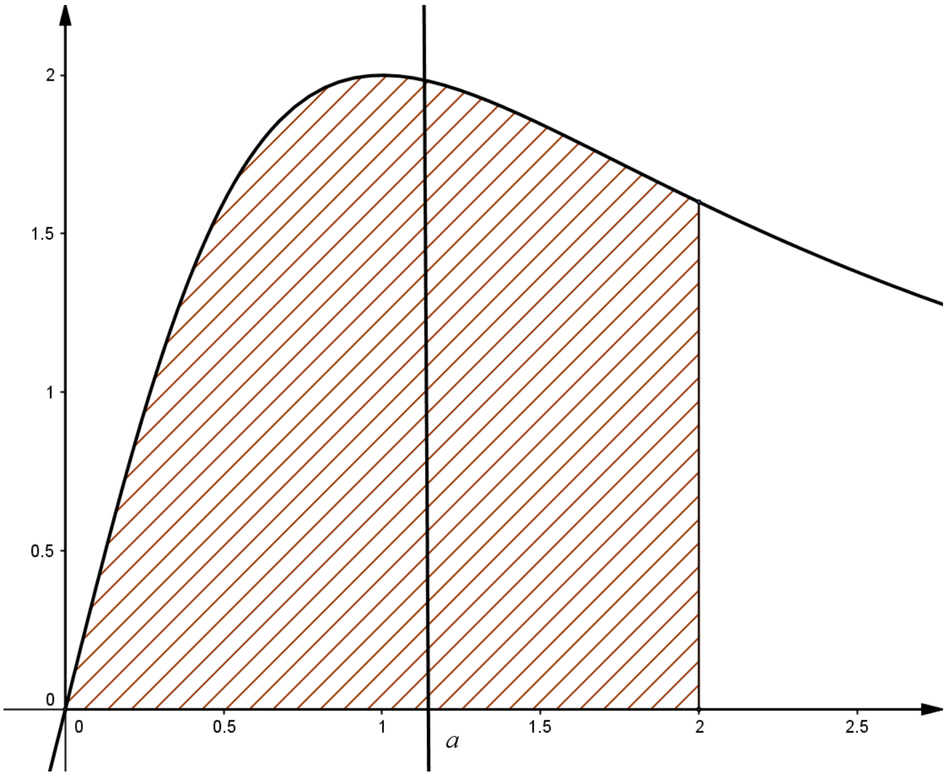
L'usine décide de régler les machines de sorte que P soit égale à 0,99. La valeur de σ, arrondie au centième, permettant d'atteindre cet objectif est :

Réponse A : 0,69 **Réponse B :** 2,58 **Réponse C :** 0,62 **Réponse D :** 0,80

Question 4

La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} .$$



La valeur exacte du réel positif a tel que la droite d'équation $x = a$ partage le domaine hachuré en deux domaines d'aires égales est :

Réponse A : $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ **Réponse B :** $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ **Réponse C :** $\ln 5 - 0{,}5$ **Réponse D** : $\frac{10}{9}$

Exercice 4 **(5 points)** **pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n \ .$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = AU_n$.

3. On considère de plus les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^n U_0$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

Partie B

On dit qu'un entier naturel N est parfait lorsque la somme de ses diviseurs (positifs) est égale à $2N$. Par exemple, 6 est un nombre parfait car ses diviseurs sont $1, 2, 3$ et 6 et on a : $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$. Dans cette partie, on cherche des nombres parfaits parmi les termes de la suite (u_n) étudiée dans la partie A.

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2^n p_n$ avec $p_n = 2^{n+1} - 1$.

2. On considère l'algorithme suivant où N, S, U, P et K sont des entiers naturels.

```
S ← 0

Demander à l'utilisateur la valeur de N
P ← 2^(N+1) − 1
U ← 2^N P

Pour K variant de 1 à U
        Si U/K est un nombre entier
                S ← S + K
        Fin Si
Fin Pour

Si S = 2U
        Afficher « oui »
Sinon
        Afficher « non »
Fin Si
```

a. À quelle question permet de répondre cet algorithme ?

Compléter, sans justification, les cases vides du tableau donné en annexe **page 8**. Il n'est pas demandé au candidat de programmer l'algorithme.

b. Faire une conjecture donnant une condition suffisante sur P pour que l'algorithme affiche « oui ».

3. Dans cette question, on suppose que p_n est un nombre premier. On note S_n la somme des diviseurs de u_n.

a. Montrer que $S_n = (1 + p_n)p_n$.

b. En déduire que u_n est un nombre parfait.

<u>Annexe à remettre avec la copie</u>

Exercice 4

Affichage de l'algorithme pour les premières valeurs de N

N	P	U	S	Affichage final
0	1	1	1	non
1	3	6	12	oui
2	7			
3	15		360	
4	31		992	oui
5	63		6552	non
6	127	8128	16256	