**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Amérique du Sud 12 novembre 2018

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les parties* A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

**Partie A**

Un commerçant reçoit les résultats d'une étude de marché sur les habitudes des consommateurs en France.
Selon cette étude :

- 54 % des consommateurs privilégient les produits de fabrication française ;
- 65 % des consommateurs achètent régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique, et parmi eux 72 % privilégient les produits de fabrication française.

On choisit un consommateur au hasard. On considère les évènements suivants :

- $B$ : « un consommateur achète régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique » ;
- $F$ : « un consommateur privilégie les produits de fabrication française ».

On note $P(A)$ la probabilité de l'évènement $A$ et $P_C(A)$ la probabilité de $A$ sachant $C$.

1. Justifier que $P\left(\overline{B} \cap F\right) = 0{,}072$.
2. Calculer $P_F\left(\overline{B}\right)$.
3. On choisit un consommateur n'achetant pas régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique.
   Quelle est la probabilité qu'il privilégie les produits de fabrication française ?

**Partie B**

Le commerçant s'intéresse à la quantité en kilogramme de farine biologique vendue chaque mois au détail dans son magasin. Cette quantité est modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 90$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Au début de chaque mois, le commerçant s'assure d'avoir 95 kg dans son stock.
   Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas répondre à la demande des clients durant le mois ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel $a$ tel que $P(X < a) = 0{,}02$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie C**

Dans cette étude de marché, il est précisé que 46,8 % des consommateurs en France privilégient des produits locaux. Le commerçant constate que parmi ses 2 500 clients, 1 025 achètent régulièrement des produits locaux.
Sa clientèle est-elle représentative des consommateurs en France ?

**EXERCICE 2** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où $u$ est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**1.** Vérifier que pour tout $x$ positif on a $f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**2.** **a.** Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

**b.** Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

**3.** On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de $x$ jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée $f'$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on note $f''$ la fonction dérivée de $f'$ et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1 + u(x)).$$

**a.** Déterminer les variations de $f'$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

**EXERCICE 3** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre. Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.
Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'unité 100 mètres.
Le plan $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ avec $z < 0$ se situe dans l'océan.
La modélisation des spécialistes établit que :

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t\\ y &=& 6t\\ z &=& -3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \text{ réel;}$$

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 10k\\ y &=& 2+6k\\ z &=& -4k\end{array}\right. \quad \text{avec } k \text{ réel} ;$$

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.
2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

   **a.** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ est normal aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

   **b.** On admet que la distance minimale entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la distance HH$'$ où $\overrightarrow{\text{HH}'}$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{n}$ avec H appartenant à la droite $\mathcal{D}_1$ et H$'$ appartenant à la droite $\mathcal{D}_2$.
   Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.
   On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel

| ⊳ Calcul formel | |
|---|---|
| 1 | Résoudre$(\{10*k-3-t=3*l, 2+6*k-6*t=13*l, -4*l+3*t=27*l\},\{k, l, t\})$<br>$\rightarrow \left\{\left\{k=\dfrac{675}{1814}, \ell=\dfrac{17}{907}, t=\dfrac{603}{907}\right\}\right\}$ |

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.
   Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2 ; 4 ; 0)$.

   **a.** Soit $M$ un point de la droite $\mathcal{D}_1$.
   Déterminer les coordonnées du point $M$ tel que la distance B$M$ soit minimale.

   **b.** En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

**EXERCICE 4** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives $z_{\text{A}}$, $z_{\text{B}}$, $z_{\text{C}}$ et $z_{\text{D}}$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l c l}z_{\text{A}}+z_{\text{C}} &=& z_{\text{B}}+z_{\text{D}}\\ z_{\text{A}}+\text{i}z_{\text{B}} &=& z_{\text{C}}+\text{i}z_{\text{D}}\end{array}\right.$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

**EXERCICE 5** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit $k$ un réel strictement positif.
On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = k$ et, pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n}.$$

On admet que tous les termes de la suite $(u_n)$ existent et sont strictement positifs.

1. Exprimer $u_2$, $u_3$ et $u_4$ en fonction de $k$.

**2.** À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite $(u_n)$ pour deux valeurs de $k$. La valeur du réel $k$ est entrée dans la cellule E2.

| | A | B | C | D | E | | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u(n)$ | | | | 1 | $n$ | $u(n)$ | | | |
| 2 | 0 | 1 | | $k =$ | 2,718 281 8 | 2 | 0 | 1 | | $k =$ | 0,9 |
| 3 | 1 | 2,718 281 8 | | | | 3 | 1 | 0,9 | | | |
| 4 | 2 | 2,718 281 8 | | | | 4 | 2 | 0,9 | | | |
| 5 | 3 | 1 | | | | 5 | 3 | 1 | | | |
| 6 | 4 | 0,135 335 3 | | | | 6 | 4 | 1,234 567 9 | | | |
| 7 | 5 | 0,006 731 9 | | | | 7 | 5 | 1,693 508 8 | | | |
| 8 | 6 | 0,000 123 4 | | | | 8 | 6 | 2,581 174 8 | | | |
| 9 | 7 | 8,315E−07 | | | | 9 | 7 | 4,371 242 2 | | | |
| 10 | 8 | 2,061E−09 | | | | 10 | 8 | 8,225 263 3 | | | |
| 11 | 9 | 1,8SE−12 | | | | 11 | 9 | 17,196 982 | | | |
| 12 | 10 | 6,305E−16 | | | | 12 | 10 | 39,949 576 | | | |
| 13 | 11 | 7,781E−20 | | | | 13 | 11 | 103,116 84 | | | |
| 14 | 12 | 3,533E−24 | | | | 14 | 12 | 295,736 2 | | | |
| 15 | 13 | 5,9E−29 | | | | 15 | 13 | 942,403 49 | | | |
| 16 | 14 | 3,625E−34 | | | | 16 | 14 | 3 336,173 | | | |

**a.** Quelle formule, saisie dans la cellule B4, permet par recopie vers le bas de calculer tous les termes de la suite $(u_n)$ ?

**b.** Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite $(u_n)$.

**Dans la suite, on suppose que $\boldsymbol{k = \mathrm{e}}$.**

**On a donc $\boldsymbol{u_0 = 1, u_1 = \mathrm{e}}$ et, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ : $\boldsymbol{u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n}}$.**

**3.** On définit, pour tout entier naturel $n$, la suite $(v_n)$ par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

**a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $-1$ et de premier terme $v_0 = 1$.

**b.** En déduire, pour tout entier naturel $n$,l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

**4.** On définit, pour tout entier naturel $n$ non nul la suite $(S_n)$ par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

**a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}$.

**b.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $S_n = \ln(u_n)$.

**5.** **a.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**b.** Trouver la plus petite valeur de $n$ telle que $u_n < 10^{-50}$ par la méthode de votre choix (écriture d'un algorithme, résolution d'inéquation, etc.)

## EXERCICE 5 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Pour tout entier naturel $n$ , on note $F_n$ le $n$-ième nombre de Fermat. Il est défini par

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

**Partie A :**

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers », L'objectif est de tester cette conjecture.

1. a. Calculer $F_0$, $F_1$, $F_2$ et $F_3$.
   b. Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 2^(2^5) + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de $F$ par $N$.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
Que peut-on en déduire ?

**Partie B :**

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.
2. Pour tout entier naturel $n$ on note :

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n.$$

On a donc $\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\right) \times F_n$.
Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2.$$

3. Justifier que, pour tous entiers naturels $n$ et $m$ tels que $n > m$, il existe un entier naturel $q$ tel que $F_n - qF_m = 2$.
4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.