# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

**MATHÉMATIQUES**

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

***Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.*

spécialité

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*
*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 (5 *points*)

**Commun à tous les candidats**

*Les valeurs approchées des résultats seront données à $10^{-4}$ près.*

*Les parties A et B sont indépendantes.*

### Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

**1.** On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   **a.** Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   **b.** Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
   **c.** L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

**2.** On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

### Partie B

**1.** On rappelle que si $T$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda$ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif $a$, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.
   **a.** Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
   **b.** Montrer que si $T$ suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs $t$ et $a$ on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire $T$ qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
   a. Déterminer la valeur exacte du paramètre $\lambda$ de cette loi.
   b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5\,000)$.
   c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

**Partie C**

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

## Exercice 2 (3 *points*)

**Commun à tous les candidats**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe $z$ tels que $|z-2|=1$.

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit $a$ un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=ax$.
   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel $a$.

**Exercice 3** (*7 points*)

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

**1.** Calculer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

*Indication : on pourra utiliser que pour tout réel* $x$ *différent de 0,* $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ est égale à 0.

**2.**

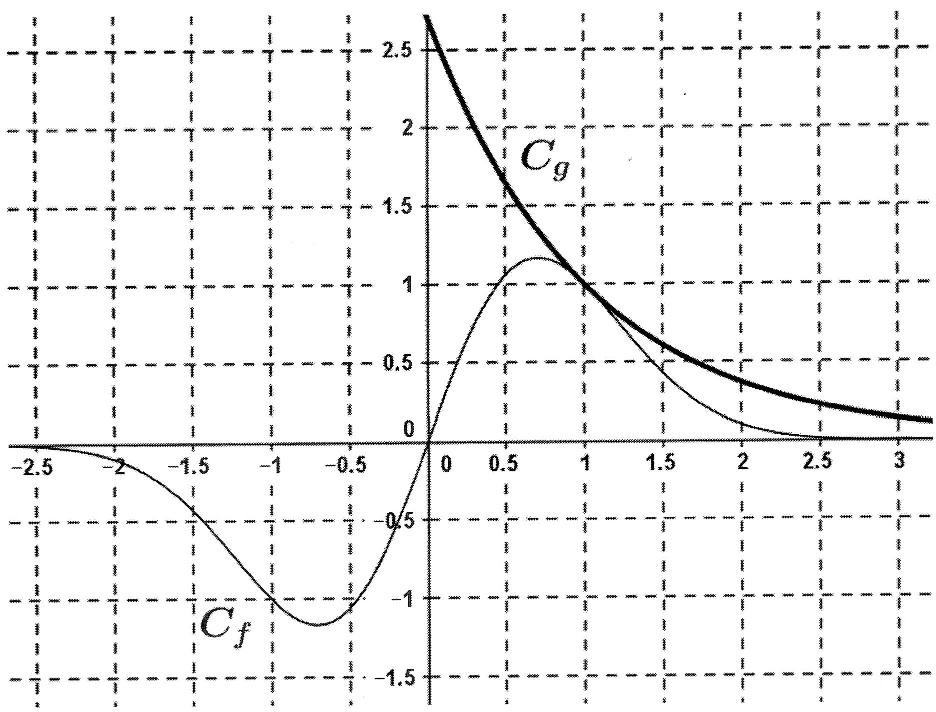
**a.** On admet que $f$ est dérivable sur **R** et on note $f'$ sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel $x$,

$$f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

**b.** En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives $C_f$ et $C_g$ respectivement des fonctions $f$ et $g$.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

   On pose, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   a. Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,

   $$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   b. On admet que la fonction $\Phi$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction $\Phi$. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

   c. En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

4. 

   a. La conjecture émise à la question **1.** de la partie B est-elle valide ?

   b. Montrer que $C_f$ et $C_g$ ont un unique point commun, noté A.

   c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

**Partie C**

1. Trouver une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

## Exercice 4 (*5 points*)

### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

*Les parties A et B sont indépendantes.*

**Partie A**

On considère l'équation suivante d'inconnues $x$ et $y$ entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \quad (E).$$

**1.** Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\,;y)$ de l'équation $(E)$ vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1)....................................
                      (2)....................................
                      Alors   Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin.
```

**2.**

**a.** Donner une solution particulière de l'équation $(E)$.

**b.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E)$.

**c.** Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E)$ tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x-3y-1=0\ .$$

On définit la suite $(A_n)$ de points du plan de coordonnées $(x_n;y_n)$ vérifiant pour tout $n$ entier naturel :

$$\begin{cases}x_0=1\\y_0=2\end{cases}\quad \text{et}\quad \begin{cases}x_{n+1}=\dfrac{-13}{2}x_n+3y_n\\[2mm] y_{n+1}=\dfrac{-35}{2}x_n+8y_n\end{cases}\quad .$$

1. On note $M$ la matrice $\begin{pmatrix}\frac{-13}{2} & 3\\ \frac{-35}{2} & 8\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel $n$, on pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

   **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1}=MX_n$.

   **b.** Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel $n$, $X_n$ en fonction de $M^n$ et $X_0$.

2. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}-2 & -3\\-5 & -7\end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de $P$, notée $P^{-1}$, est définie par $P^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -3\\-5 & 2\end{pmatrix}$.

   **a.** Vérifier que $P^{-1}\,M\,P$ est une matrice diagonale $D$ que l'on précisera.

   **b.** Pour tout entier naturel $n$, donner $D^n$ sans justification.

   **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $M^n=P\,D^nP^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel $n$, $M^n=\begin{pmatrix}-14+\frac{15}{2^n} & 6-\frac{6}{2^n}\\ -35+\frac{35}{2^n} & 15-\frac{14}{2^n}\end{pmatrix}$.

   En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression de $x_n$ et de $y_n$ en fonction de $n$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, le point $A_n$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.