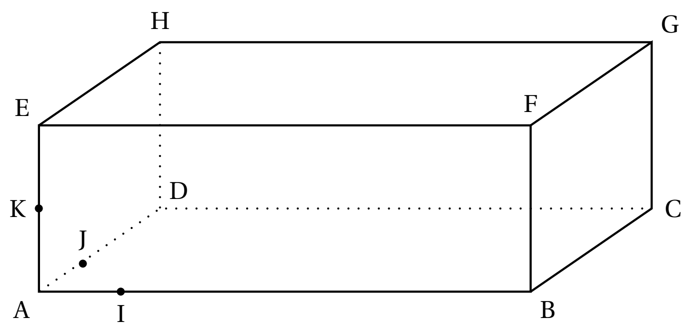
Baccalauréat S Polynésie 12 juin 2015

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{\text{AI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}$, $\overrightarrow{\text{AK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AI}},\,\overrightarrow{\text{AJ}},\,\overrightarrow{\text{AK}}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\2\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie**). On ne demande pas de justification.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type$\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.
Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

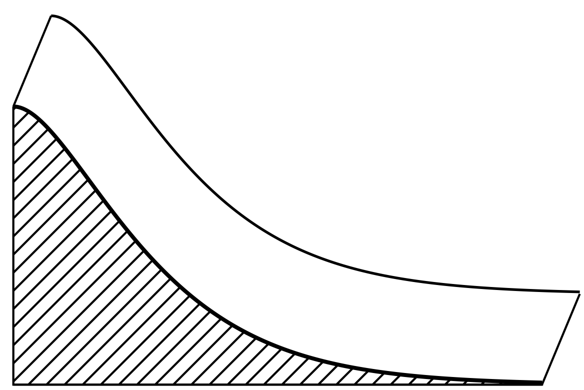
1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

   b. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de $1,70$ m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :

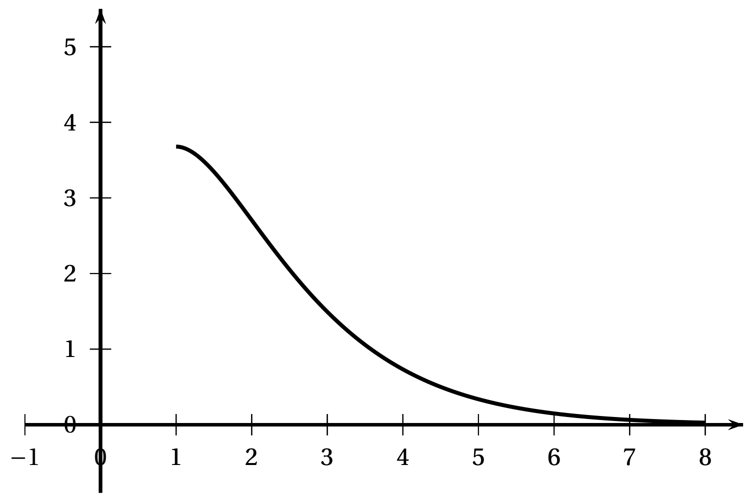


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.

   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut.

   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1~;~8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

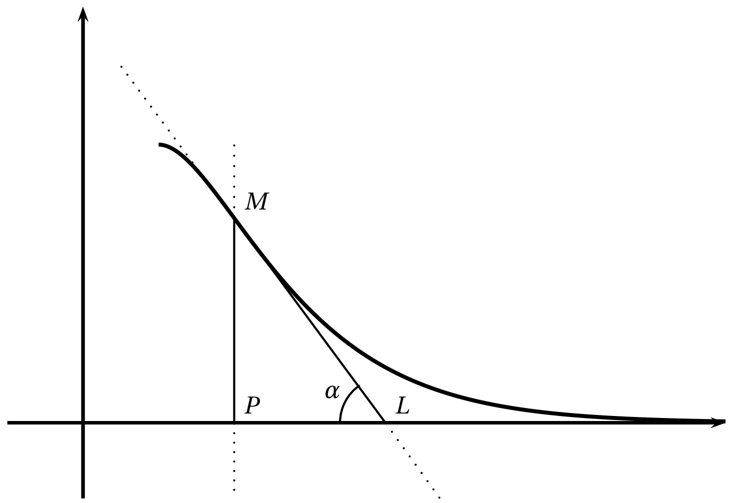
1. Soit g la fonction définie sur $[1~;~8]$ par

$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = \left|f'(x)\right|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, $v$réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur …
	S prend la valeur …
Traitement :	Pour k variant de … à … faire
	… prend la valeur …
	… prend la valeur …
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C Étude de ($\boldsymbol{Sn}$)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
Vérifier que $A^2 = A + 2I$.

2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.

3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de k_n en fonction de n.

5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de t_n en fonction de n.

6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

7. En déduire alors, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n.

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1