Durée : 4 heures

Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle-Calédonie 5 mars 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit a un nombre réel strictement positif.
On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.
Pour cela. on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = \text{e}^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier** $a = 2$
   La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = \text{e}^x - 2x$.
   a. Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.*
   b. En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.
2. **Étude du cas général où a est un réel strictement positif**
   a. Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.
   c. Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.
   d. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.
À la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.
On note L l'évènement « La puce est livrée ».
On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».

Étant donné deux évènements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.

  a. Donner la valeur $P_L(C)$.

  b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?

  c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.
On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

  a. Montrer que $\lambda = \dfrac{-\ln(0,98)}{1\,000}$.

  b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

  c. Calculer $P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à $0,003$.
On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées- On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

  a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.

  b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

  c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0~;~2~;~-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.
On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+k\\ y &=& -2k \quad (k \in \mathbb{R}).\\ z &=& 2\end{array}\right.$$
Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. **a.** Donner une représentation paramétrique de D_1.

   b. Donner un vecteur directeur de D_2 $\left(\text{on le notera } \overrightarrow{u_2}\right)$.

   c. Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient-il à D_2 ?

2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
   Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

   Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

   a. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}17\\-22\\9\end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

   b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
   Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + \sqrt{3}v_n \end{array}\right. .$$

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.

2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N donné.

   a. On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter $\sqrt{3}S - T$ à S
	Affecter $S + \sqrt{3}T$ à T
	Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

   Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?

Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + \text{i}v_n$.
On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \text{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = az_n.$$

b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n & = & 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{array}\right.$$