∽ Baccalauréat S Métropole–La Réunion ∾
9 septembre 2015

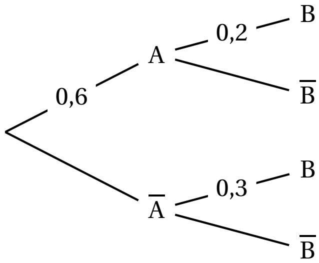
EXERCICE 1 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

Question 1

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'événement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 **c.** 0,24 **d.** 0,5

Question 2

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 **b.** 0,25 **c.** 0,75 **d.** 0,875

Question 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

a. 0,159 **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

Question 4

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] **c.** [0,402 ; 0,598] **d.** [0,412 ; 0,695]

Question 5

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.

Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 **c.** 1 600 **d.** 3 200

EXERCICE 2 **7 POINTS**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :
   $$H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont
- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A, x et h des réels.

Entrée :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{K}$

Traitement	Pour i variant de 1 à K
	    Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$
	    Affecter à x la valeur $x + h$
	Fin Pour

Sortie	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points A(0 ; 1 ; −1) et B(−2 ; 2 ; −1).

— la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -1-t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. a. Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

b. Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et passe par le point M.

4. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)$.

5. a. Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

6. a. Exprimer MN^2 en fonction de u.

b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x-26k=m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tel que $15u-26v=1$.
Trouver un tel couple.

2. En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,k_0)$ de l'équation (E).

3. Montrer que $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si
$15(x-x_0)-26(k-k_0)=0$.

4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;\,k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 26q+7m\\ k &=& 15q+4m\end{array}\right. \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

— à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,

— on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26,

— on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS**.
2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.
   a. Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$.
   b. En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.
   c. En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.
3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.
   Décoder le mot WHL.
4. Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

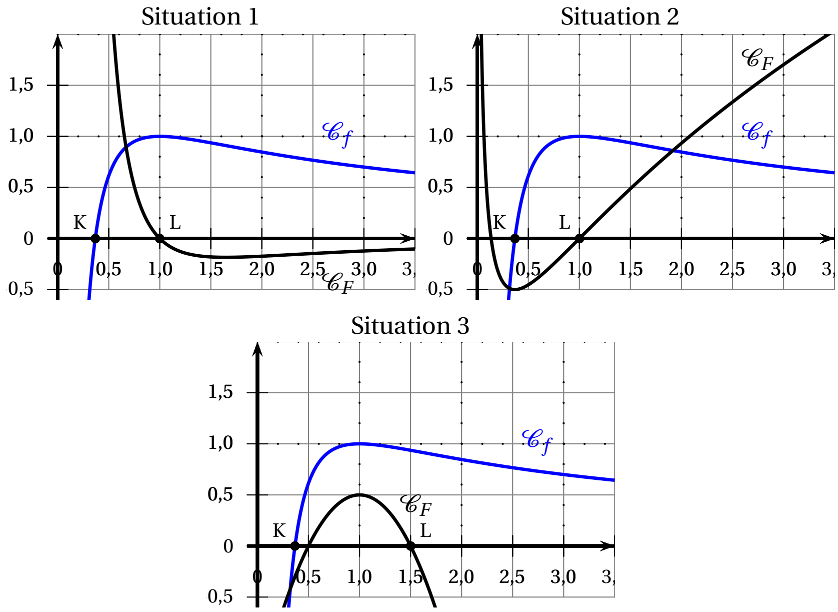
EXERCICE 4 **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.



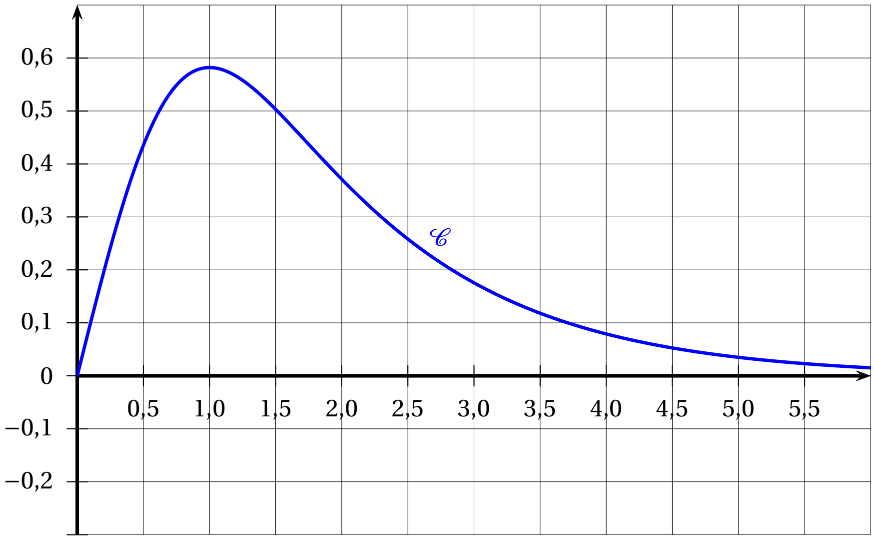
2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :
   — K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;
   — L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

ANNEXE Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur [0 ; 6]



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur [0 ; 1]