

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. a) Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N-1 \text{ modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \text{ modulo } N$.

- b) Dédurre de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \text{ modulo } 26$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5k \equiv 1 \text{ modulo } 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer la matrice $6A - A^2$.

b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

- c) Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

- d) Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que :
$$\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

2. En utilisant la question 1.b) de la **partie A**, établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \text{ modulo } 26.$$

3. Décoder le mot « QP ».