BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 4**

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

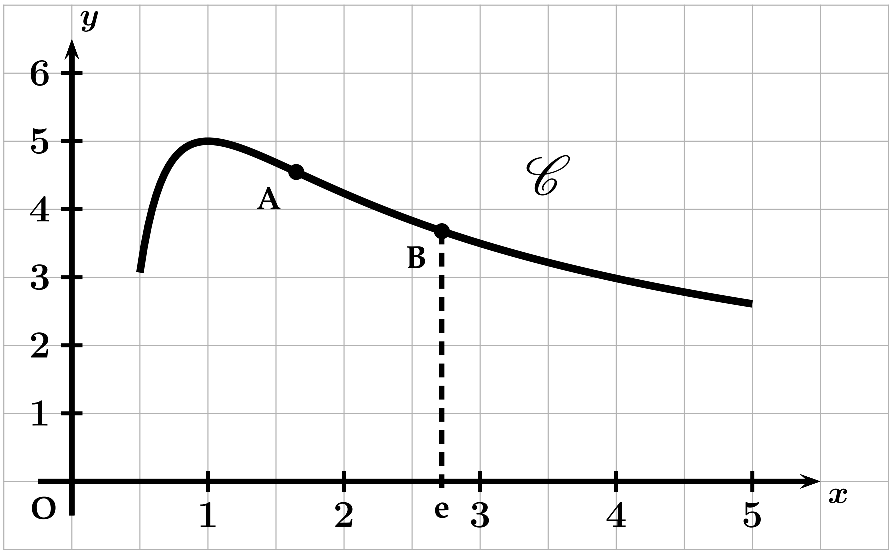
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{5+5\ln x}{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5\,;5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle $[0,5\,;5]$ on a :

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}$$

1. La fonction f' est :

- **(a)** positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;5]$
- **(b)** négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;5]$
- **(c)** négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;1]$

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

(a) $-\dfrac{5}{e^2}$ **(b)** $\dfrac{10}{e}$ **(c)** $\dfrac{5}{e^3}$

3. La fonction f' est :

(a) croissante sur l'intervalle $[0,5\,;1]$

(b) décroissante sur l'intervalle $[1\,;5]$

(c) croissante sur l'intervalle $[2\,;5]$

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

(a) $1,65$ **(b)** $1,6$ **(c)** $e^{0,5}$

5. On note $\mathscr{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

(a) $20 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 30$ **(b)** $10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$ **(c)** $5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$

EXERCICE 2 (5 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à $0,01$ près.

Partie A

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction).

Il remarque que :

- 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
  - 40 % paient en espèces ;
  - 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact ;
  - les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret.
- 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
  - 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret ;
  - les autres paient en espèces.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.
On considère les évènements suivants :

- V : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € » ;
- E : « pour son achat, le client a réglé en espèces » ;
- C : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret » ;
- S : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

1. **a)** Donner la probabilité de l'évènement V, notée $P(V)$, ainsi que la probabilité de S sachant V notée $P_V(S)$.

b) Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a)** Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est égale à $0,62$.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant.
On admet que X suit la loi normale de moyenne $27,5$ et d'écart-type 3.
On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 €.

2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre $24,5$ € et $30,5$ €.

Partie C

Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique.
Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique.
Déterminer, avec un niveau de confiance de $0,95$, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8\,u_n + 18$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
On précisera la valeur de v_0.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \longleftarrow 65$
ligne 2	$n \longleftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$n \longleftarrow n+1$
ligne 5	$u \longleftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

a) Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.

b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

c) Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geqslant 85$.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

c) Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ? Argumenter la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à $0,01$ près.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = (3,6\,x + 2,4)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$$

Partie A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$ on a :

$$f'(x) = (-2,16\,x + 2,16)\,\mathrm{e}^{-0,6x}$$

2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;4]$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.

3. On admet que la fonction F définie par :

$$F(x) = (-6x - 14)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.
Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur numérique approchée.

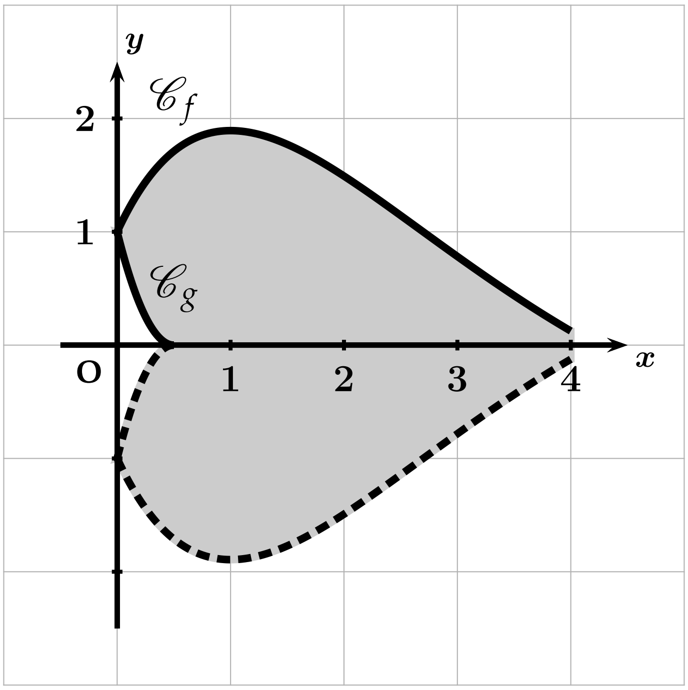
Partie B

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.
On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;0,5]$.

On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

2. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.

Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.