Révisions obligatoires de Mathématiques

Pour les élèves de Première S passant en Terminale S.
Ce travail constitue une **base** des connaissances requises pour bien démarrer l'année de Terminale et fera l'objet d'une évaluation à la rentrée.

Exercice 1

On considère les fonctions f et g à variable réelle définies par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+a}$ où a est un réel strictement positif et par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$.

1. Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g de ces deux fonctions.
2. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Justifier.
3. Déterminer a pour que la courbe représentative de f admette une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
4. Démontrer que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.
5. (a) Démontrer que pour tout réel h de $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}+1}$.

   (b) En déduire que la fonction g est dérivable en 0 et déterminer alors $g'(0)$.
6. Déduire des deux questions précédentes l'ensemble D des réels en lesquels la fonction g est dérivable.

Exercice 2

On considère un réel a et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$. (On distinguera le cas a positif et le cas a négatif)
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir a ;
Si ........................... alors
        Afficher « la fonction f est .................................... sur ℝ »
Sinon
        x1 =................................ ;
        x2 =................................ ;
        Afficher « la fonction f est ............................ sur ]−∞ ; x1] et sur
        [............................[ et elle est .............................. sur [......................] »
Fin Si
```

   (a) Recopier et compléter les pointillés pour que l'algorithme précédent demande un nombre réel a et affiche alors les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Que renvoie l'algorithme si on saisit les valeurs $a = -3$ puis $a = 2$?

Exercice 3

Soit m un réel et soit (d_m) la droite d'équation $m^2x - (m-1)y - 1 = 0$.

1. Pour quelles valeurs de m la droite (d_m) passe-t-elle par le point $A(-1\,;1)$? Donner les équations des droites obtenues pour ces valeurs.
2. Pour quelle valeur de m le vecteur $\vec{u}(1\,;4)$ est-il un vecteur directeur de la droite (d_m) ?
3. La droite (d_m) peut-elle être parallèle à la droite (D) d'équation $5x - 3y + 4 = 0$?

Exercice 4

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$.
On admettra ici que la fonction f est strictement croissante sur son intervalle de définition.

1. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de la solution de l'équation (E) : $f(x) = 0$.
2. On considère l'algorithme suivant composé de 16 lignes :

```
1   Initialisations :
2   a prend la valeur 1
3   b prend la valeur 2
4
5   Traitement :
6   Tant que b − a > 0,001
7       m prend la valeur (a + b)/2
8       Si m² − √m − 1 < 0 alors
9           a prend la valeur m
10      Sinon
11          b prend la valeur m
12      Fin Si
13  Fin Tant que
14
15  Sorties :
16  Afficher a et b
```

   (a) Faire fonctionner cet algorithme **à la main** en notant sur votre copie les 5 premières valeurs prises par a ou b.

   (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

   (c) En particulier, expliquer la ligne 8 de l'algorithme et le choix du sens de l'inégalité.

   (d) Réaliser ce programme sur la calculatrice. Quel est l'encadrement obtenu ?

   (e) Quelle ligne doit-on rajouter en **Sorties** afin que le programme renvoie une valeur approchée de la solution de l'équation (E) ? Quelle est la précision obtenue ?

   (f) Que doit-on modifier pour obtenir un meilleur encadrement ?

Exercice 5

Soit u la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$.
Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1. Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. (a) Exprimer v_n en fonction de n.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = t_n + w_n$, avec $t_n = \frac{11}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $w_n = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$.
3. Démontrer que t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et que w est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.
4. On pose $T_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$, $W_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$ et $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

   (a) (Question de cours) Démontrer que $T_n = -\frac{3}{2}(t_{n+1} - t_0)$

   (b) Exprimer T_n en fonction de n, puis exprimer W_n en fonction de n.

   (c) En déduire U_n en fonction de n.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $D(1\,;1)$, $E(5\,;7)$ et $A(5\,;3)$.

1. Montrer qu'une équation de la médiatrice (d_1) du segment $[DE]$ est $2x + 3y - 18 = 0$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice (d_2) du segment $[EA]$.
3. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ADE.

Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 + X + 1 = 0$.
2. En déduire les solutions réelles de l'équation $2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$.

Exercice 8

Dans un jeu de 52 cartes, on tire au hasard une carte. On considère les deux évènements suivants :
A : « la carte tirée est un carrreau »
B : « la carte tirée ne figure pas dans un jeu de 32 cartes »
Calculer $P(\overline{A})$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 9

Lors d'un concours de tir, on estime qu'à chaque essai, un tireur atteint la cible avec la probabilité $0,35$. Chaque tireur effectue dix essais. On suppose que ces essais sont identiques et indépendants.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'un tireur atteint sa cible au cours des 10 essais.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que le tireur atteigne exactement 4 fois la cible au cours des 10 essais ?
3. Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible au moins 9 fois au cours des 10 essais ?
4. Quel est le plus petit nombre de tirs qu'il doit effectuer pour atteindre la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure à $0,9$?
5. Combien peut-il espérer réussir de tirs ?
6. Proposer une simulation de l'expérience sur la calculatrice en utilisant le générateur aléatoire. L'algorithme affichera le nombre de tirs réussis.