Révisions obligatoires de Mathématiques

Ce travail de révision est obligatoire p**our les élèves passant en Terminale** et :

– suivant la **Spécialité Mathématiques**.

ou

– suivant l'**option Mathématiques Complémentaires**.

Ce travail constitue une **base** des connaissances requises pour bien démarrer l'année de Terminale et fera l'objet d'une évaluation à la rentrée.

Attention : l'ensemble du programme de Mathématiques a été étudié en Première (avant ou pendant le confinement) et il convient à chaque élève de maîtriser l'ensemble de ce programme pour une bonne rentrée scolaire. Les chapitres de Première ne pourront pas être travaillés en début de Terminale.

Conseil : afin de bien se « rafraichir la mémoire » après des vacances que nous vous souhaitons reposantes et distrayantes, nous vous conseillons de commencer à travailler ces exercices aux alentours du 15 août, afin que tout soit *frais* dans votre tête le jour de la rentrée !

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;1[$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $[-1\,;1]$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Déterminer les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations sur $[-1\,;1]$.

2) En déduire le signe de la fonction g sur $[-1\,;1]$.

Partie B – Étude de la fonction f

1) Justifier que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ puis que pour tout $x\in]-1\,;1[$, on a $f'(x)=\dfrac{x\times g(x)}{(x^2-1)^2}$.

2) En déduire les variations de f sur $]-1\,;1[$ et dresser son tableau de variations sur $]-1\,;1[$.

3) Déterminer sur $]-1\,;1[$ l'abscisse du point de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite δ d'équation $y=x+2$.

Exercice 2

Soit m un réel et soit (d_m) la droite d'équation $m^2x-(m-1)y-1=0$.

1) Pour quelles valeurs de m la droite (d_m) passe-t-elle par le point $A(-1\,;1)$? Donner les équations des droites obtenues pour ces valeurs.

2) Pour quelle valeur de m le vecteur $\vec{u}(1\,;4)$ est-il un vecteur directeur de la droite (d_m) ?

3) La droite (d_m) peut-elle être parallèle à la droite (D) d'équation $5x-3y+4=0$?

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2+X-1=0$.

2) En déduire les solutions réelles de l'équation $2\cos^2 x+\cos x-1=0$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $D(1\,;1)$, $E(5\,;7)$ et $A(5\,;3)$.

1) Montrer qu'une équation de la médiatrice (d_1) du segment $[DE]$ est $2x + 3y - 18 = 0$.

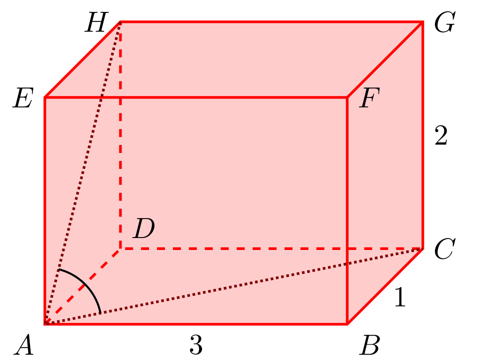
2) Déterminer une équation de la médiatrice (d_2) du segment $[EA]$.

3) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ADE.

Exercice 5

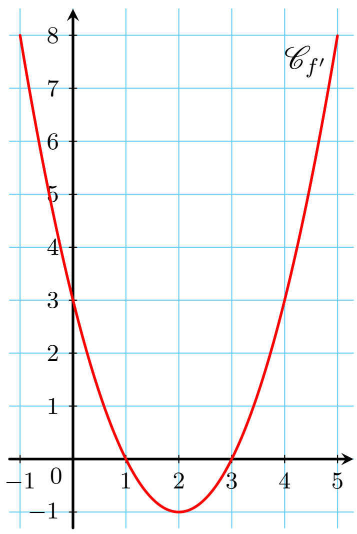
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.
On a les longueurs $AB = 3$, $BC = 1$ et $CG = 2$.

Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{HAC}$, arrondie au dixième de degré.



Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $[-1\,;5]$ dont **la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous** :



1) Lectures graphiques

a) À l'aide du graphique ci-dessus, déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire les variations de f sur $[-1\,;5]$.

2) Expression de $f(x)$

On admet que pour tout réel x, on a $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels à déterminer.

Sachant que $f(0) = -1\,;\ f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f(3) = -1$, déterminer les valeurs de a, b et c et donner alors l'expression de $f(x)$.

3) Étude de la fonction f

On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.
On appelle T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

a) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et vérifier la cohérence avec la question 1 (b).

b) Déterminer une équation de T.

c) Étudier le signe de $f(x) - \left(-x + \dfrac{5}{3}\right)$ sur $[-1\,;5]$. (On pourra s'aider du développement de $(x-2)^3$)

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 7

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016+n$, on a donc $u_0 = 27500$.

1) a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.

3) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
n ⟵ 0
U ⟵ 27500
Tant que U ⩽ ......
    n ⟵ .....................
    U ⟵ .....................
Fin Tant que
Afficher ..........................
```

4) a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas et **à la main**. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

b) Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.

c) Programmer en **Python** cet algorithme et vérifier le résultat obtenue à la question précédente.

5) On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3900$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n = 23600 \times 1,04^n + 3900$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

1) $(E) : \mathrm{e}^{2x} = 2 - \mathrm{e}^x$ (On pourra poser $X = \mathrm{e}^x$).

2) $(I) : \dfrac{\mathrm{e}^{2x+3}}{\mathrm{e}^{5-x}} > \mathrm{e}^{x-1}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x$.

1) Calculer pour tout réel x, $f'(x)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Préciser en quelle valeur il est atteint et en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5) Soit T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

   a) Déterminer une équation de T.

   b) Montrer que T passe par le point de coordonnées $(0\,;-\mathrm{e}^2)$.

Exercice 10

Une étude réalisée par une compagnie aérienne a établi que, sur une ligne donnée, pour une réservation en agence, 5 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement alors que, pour une réservation par Internet, 2 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement.
Les réservations en agence représentent 30 % de l'ensemble des réservations.
Pour un embarquement donné et une réservation prise au hasard, on considère les évènements suivants :

- A : « la réservation a été faite en agence » ;
- I : « la réservation a été faite par Internet » ;
- E : « le passager se présente à l'embarquement ».

1) Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.

2) Déterminer la probabilité qu'une réservation ait été faite en agence et que le client ne se soit pas présenté à l'embarquement.

3) Démontrer que la probabilité qu'un client ne se présente pas à l'embarquement est de $0,029$.