LOI NORMALE

Probabilités – Chapitre 3

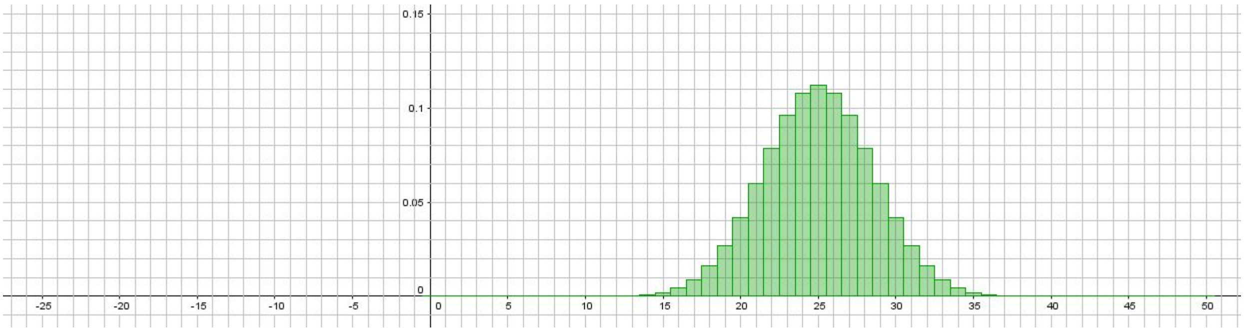
Table des matières

I Activité d'approche

Cette activité est à réaliser en classe en suivant l'animation GeoGebra prévue au tableau.

Soit p un réel de l'intervalle $[0\,;1]$. On définit alors, pour tout entier naturel n non nul, une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1. **Étude de X_n**
   (a) Rappeler la valeur, en fonction de n et de p, de l'espérance μ et de l'écart-type σ de X_n.
   (b) On a représenté ci-dessous, pour $n = 50$ et $p = 0,5$, l'histogramme des probabilités de X_n :



   Dessiner à la main une courbe susceptible de lisser l'histogramme ci-dessus.

2. **Étude de Z_n**
   On pose, pour tout entier naturel n, Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$.
   (a) Dans quel intervalle la variable Z_n prend-elle ses valeurs ?
   (b) Comment représenter alors l'histogramme de la loi de Z_n ?
   (c) Démontrer que l'espérance et l'écart-type de Z_n ne dépend ni de n ni de p.
   (d) En déduire que l'histogramme de la loi de Z_n peut être lissé par la courbe d'une fonction ne dépendant ni de n ni de p. On nommera cette fonction f dans la suite.

3. **Étude de la fonction f**
   On a ainsi observé que toute variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pouvait être ramenée à une variable aléatoire Z_n, qui, pour de grandes valeurs de n, est proche d'une variable aléatoire continue Z ayant comme densité la fonction f.

   La loi suivie par Z est appelée la **loi normale centrée réduite**, et sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

   (a) Justifier que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On admettra que l'aire sous la courbe de f sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.
   (b) Démontrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
   (c) Déterminer le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (d) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en déduire celle en $-\infty$.
   (e) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (f) Construire la courbe de la fonction f dans un repère d'unité graphique 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

II Le théorème de Moivre-Laplace

II 1 Variable centrée réduite

Définition et Propriété

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.
Alors la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ a pour espérance 0 et pour écart-type 1 : on l'appelle la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X.

Démonstration :

On rappelle un résultat vu en classe de Première :

Si X est une variable aléatoire et a et b deux réels, alors :
$E(aX+b) = aE(X)+b$ (linéarité de l'espérance) et $Var(aX+b) = a^2Var(X)$.

(Redémontrer ces propriétés en exos dans le cas d'une V.A. discrète, et expliquer « pourquoi » elles sont vraies.)

Ainsi :

- $E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma}E(X) - \dfrac{\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu}{\sigma} - \dfrac{\mu}{\sigma} = 0$
- $Var\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}Var(X) = \dfrac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1.$

II 2 Le théorème

Théorème (admis)

Soit $p \in [0;1]$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, et Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n
(c'est-à-dire que $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$).

Alors pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

A la calculatrice :

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = \text{binomCdf}(n,p,a,b)$ (MENU : 5, 5, E)
- Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $P(a \leqslant Z \leqslant b) = \text{normCdf}(a,b,0,1)$ (MENU : 5, 5, 2)
- Pour trouver u tel que $P(Z < u) = p$, faire $\text{PinvNorm}(p,0,1)$ (MENU : 5, 5, 3)

III Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

III 1 Définition

Définition

On appelle **loi normale centrée réduite** la loi de probabilité de densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2}}$$

Remarque :

• f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et on admet que $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

• Le théorème de Moivre-Laplace dit qu'une variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p suit, si n est grand, une loi proche d'une loi normale centrée réduite :

$$\text{Pour } n \text{ assez grand, } P(a\leqslant Z_n\leqslant b)\approx\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

III 2 Courbe de la densité $f : x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

• $\forall\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$, donc f est paire sur $\mathbb{R}$ et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

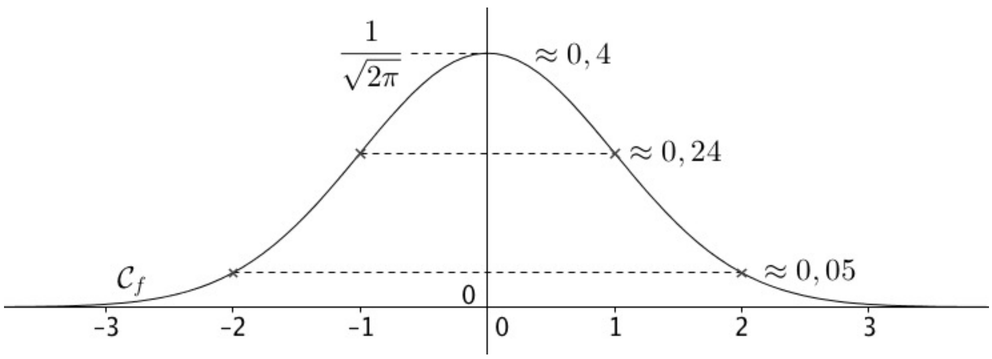
• $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x^2}{2}=-\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Par symétrie de la courbe de f, on a donc aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Ainsi, la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}<0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0



III 3 Propriété

III 3 a Énoncé de la propriété

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique u_α de $\mathbb{R}_+$ tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration (BAC !) :

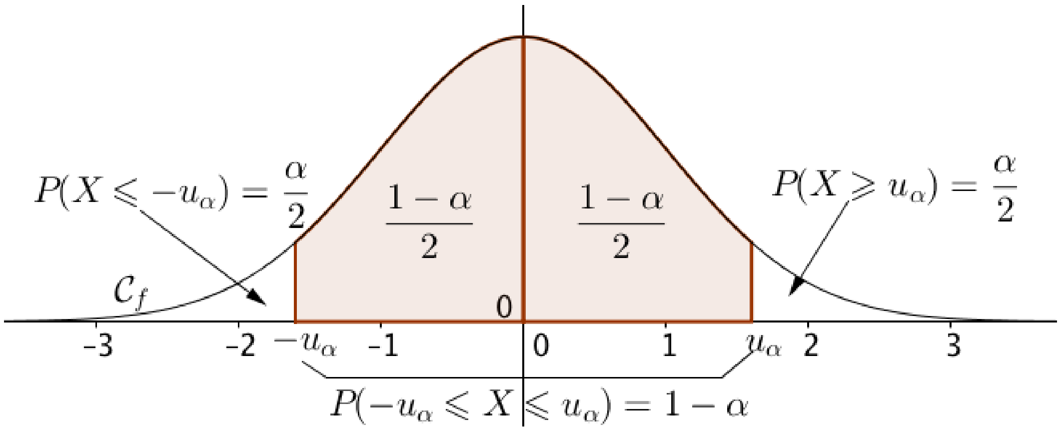
Par symétrie de la courbe de la densité de la loi de X :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(-x \leqslant X \leqslant x) = 2P(0 \leqslant X \leqslant x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}_+$:
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(-x \leqslant X \leqslant x) = 2F(x)$.

Soit alors $\alpha \in]0;1[$: on cherche à montrer que l'équation $2F(x) = 1-\alpha$, c'est-à-dire $F(x) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ a une solution unique dans $\mathbb{R}_+$.
Or d'après le chapitre **8 III 2)**, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F' = f > 0$.
Donc F est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\begin{cases} F(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \end{cases}$

On sait que $0 < \alpha < 1$ donc $-1 < -\alpha < 0$, donc $0 < 1-\alpha < 1$ donc $0 < \dfrac{1-\alpha}{2} < \dfrac{1}{2}$.
D'où d'après le corollaire du TVI, il existe un unique u_α de $\mathbb{R}_+$ tel que $F(u_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

III 3 b Représentation et conclusion



Conclusion : Pour tout réel u, on a :
$P(X \leqslant -u) = P(X \geqslant u)$ et $P(X \leqslant -u) = 1 - P(X > -u) = 1 - P(X < u)$ et $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 1 - 2P(X < -u)$.

III 3 c Valeurs particulière à connaitre

Propriété

On a $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.

Démonstration :

Méthode à retenir pour les exercices :
La calculatrice ne permet pas d'obtenir directement un réel u tel que $P(-u \leqslant X \leqslant u) = p$, avec p donné. En revanche, elle permet d'obtenir un réel u tel que $P(X \leqslant u) = p$, avec p donné. Il faut donc transformer l'écriture de $P(-u \leqslant X \leqslant u) = \ldots$ à $P(X \leqslant u) = \ldots$.

• D'après la propriété précédente, on sait que $u_{0,05}$ existe et est unique. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} P(-u_{0,05} \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 1 - \alpha &\Leftrightarrow P(-u_{0,05} \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 1 - 0,05 \\ &\Leftrightarrow P(-u_{0,05} \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 0,95. \end{aligned}$$

Or X suit la loi normale centrée réduite, donc par symétrie de la courbe de sa densité, on a :

$$\begin{aligned} P(-u_{0,05} \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 0,95 &\Leftrightarrow 2P(0 \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 0,95 \\ &\Leftrightarrow P(0 \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 0,475 \\ &\Leftrightarrow P(X \leqslant u_{0,05}) - P(X < 0) = 0,475 \\ &\Leftrightarrow P(X \leqslant u_{0,05}) - 0,5 = 0,475 \\ &\Leftrightarrow P(X \leqslant u_{0,05}) = 0,975 \end{aligned}$$

D'après la calculatrice : **5.5.3.** $u_{0,05} \approx 1,96$. (95% de chance que X soit entre $-1,96$ et $1,96$.)

• *A faire de même en exercice pour* $u_{0,01}$.

III 4 Espérance et variance

III 4 a Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Alors $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t f(t)\,\mathrm{d}t + \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors $E(X) = 0$.

Démonstration :

$$\forall x < 0,\ \int_x^0 t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-1 + e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{x^2}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t f(t)\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, $\forall x > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. D'où par somme $\boxed{E(X) = 0}$

III 4 b Variance

Propriété (admise)

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors $V(X) = 1$

IV Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

IV 1 Définition

Définition

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.

On dit que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

IV 2 Espérance et variance

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
Alors $E(X)=\mu$ et $V(X)=\sigma^2$.

Remarque :
La courbe de la densité de X est une courbe « en cloche » d'axe de symétrie $x=\mu$ et plus étirée et moins haute quand σ est plus grand (Car l'aire sous la courbe vaut toujours 1).

Exemples :

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(30;9)$. (donc $\sigma=3$)

Alors $P(25\leqslant X\leqslant 35)\approx 0,904$ et $P(X\geqslant 32)\approx 0,252$. (*Résultats étaient prévisibles*)

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(7;0,01)$. (donc $\sigma=0,1$)

Déterminer une valeur approchée de x au centième près tel que :

1. $P(X\leqslant x)=0,673$. (correction : $x\approx 7,04$.)
2. $P(X\geqslant x)=0,892$. (correction : $P(X\leqslant x)=1-0,892=0,108$ donc $x\approx 6,88$.)

IV 3 Intervalles remarquables

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. On cherche des valeurs approchées des probabilités des événements :

• $X\in[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$; • $X\in[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$; • $X\in[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$

On sait que $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$. Donc :

- $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=P\left(-1\leqslant\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right)\approx 0,683\approx 68\%$.
- $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=P\left(-2\leqslant\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 2\right)\approx 0,954\approx 95\%$.
- $P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=P\left(-3\leqslant\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 3\right)\approx 0,997\approx 100\%$.

Remarque :
La probabilité d'obtenir une valeur de X distance de plus de 3σ de la moyenne est presque nulle.

Exemple :

Dans un lycée, la moyenne de mathématiques d'un élève de Terminale S pris au hasard est une variable aléatoire qui suit approximativement la loi $\mathcal{N}(10,5;6,25)$.

L'affirmation « *Environ* $\dfrac{2}{3}$ *des élèves de TS ont une moyenne de maths située entre 8 et 13* » est-elle juste ?

Correction :
$\mu=10,5$ et $\sigma=2,5$. $P(10,5-2,5\leqslant X\leqslant 10,5+2,5)=P(8\leqslant X\leqslant 13)\approx 0,68$. Donc c'est juste !