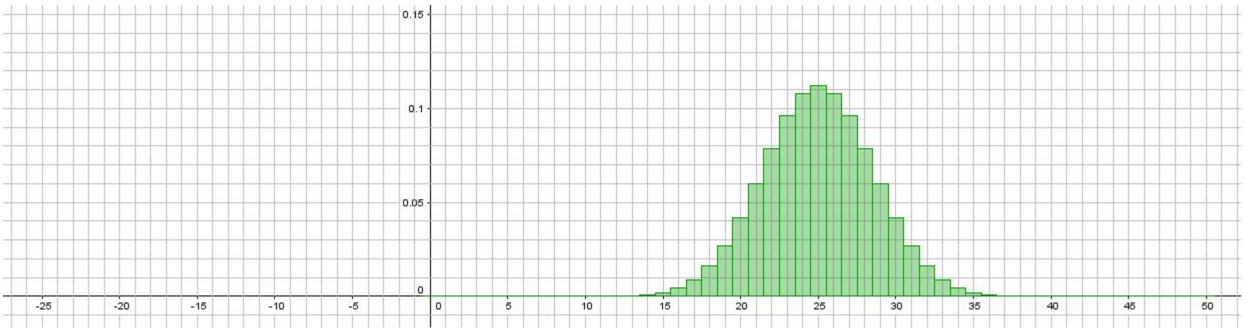
I Activité d'approche

Cette activité est à réaliser en classe en suivant l'animation GeoGebra prévue au tableau.

Soit p un réel de l'intervalle $[0\,;1]$. On définit alors, pour tout entier naturel n non nul, une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1. **Étude de X_n**
   (a) Rappeler la valeur, en fonction de n et de p, de l'espérance μ et de l'écart-type σ de X_n.
   (b) On a représenté ci-dessous, pour $n = 50$ et $p = 0,5$, l'histogramme des probabilités de X_n :



   Dessiner à la main une courbe susceptible de lisser l'histogramme ci-dessus.

2. **Étude de Z_n**
   On pose, pour tout entier naturel n, Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$.
   (a) Dans quel intervalle la variable Z_n prend-elle ses valeurs ?
   (b) Comment représenter alors l'histogramme de la loi de Z_n ?
   (c) Démontrer que l'espérance et l'écart-type de Z_n ne dépend ni de n ni de p.
   (d) En déduire que l'histogramme de la loi de Z_n peut être lissé par la courbe d'une fonction ne dépendant ni de n ni de p. On nommera cette fonction f dans la suite.

3. **Étude de la fonction f**
   On a ainsi observé que toute variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pouvait être ramenée à une variable aléatoire Z_n, qui, pour de grandes valeurs de n, est proche d'une variable aléatoire continue Z ayant comme densité la fonction f.

   La loi suivie par Z est appelée la **loi normale centrée réduite**, et sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
   (a) Justifier que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On admettra que l'aire sous la courbe de f sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.
   (b) Démontrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
   (c) Déterminer le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (d) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en déduire celle en $-\infty$.
   (e) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (f) Construire la courbe de la fonction f dans un repère d'unité graphique 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.