NOTION DE LOI A DENSITÉ

Probabilités - Chapitre 2

Table des matières

I Introduction

I 1 Activités d'approche

- Activité 1 page 377 (uniquement la partie **1** pour faire apparaitre la probabilité nulle en un réel).
- Activité 2 page 377 (pour faire apparaitre le lien entre une probabilité et l'aire sous une courbe).

I 2 Variable aléatoire discrète, variable aléatoire continue

Dans les situations et expériences aléatoires étudiées jusqu'à présent était associé un univers **fini** : toutes les variables aléatoires rencontrées ne prenaient jusqu'à alors qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

On dit que ces variables aléatoires sont **discrètes**.

Cependant, certaines expériences aléatoires conduisent à utiliser des variables aléatoires qui prennent un nombre infini de valeurs comprises dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que ces variables aléatoires sont **continues**.

Exemples de variables aléatoires continues :

- On tire sur une cible circulaire de rayon 1 mètre, sans jamais la manquer. La variable aléatoire qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs réelles comprises dans l'intervalle $[0; 1]$.
- On étudie la durée de vie exacte d'un composant électronique. La variable aléatoire qui donne cette durée de vie en secondes est un réel (pas forcément entier) de l'intervalle $[0; +\infty[$.

I 3 Loi de probabilités

Si X est une variable aléatoire continue, il n'est alors plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements « $X = x_k$ » puisqu'il y en a une infinité.
Une autre approche est alors nécessaire :
On s'intéresse ainsi aux événements du type « X prend ses valeurs dans un intervalle J », noté « $X \in J$ », et on cherche alors la probabilité $P(X \in J)$.

Exemples :

- Pour l'exemple de la cible, on cherchera par exemple $P(X \in [0; 0,2])$.
- Pour l'exemple du composant électronique, on cherchera par exemple $P(X > 3,2 \times 10^7)$.

On peut résumer ainsi :

Comment définir la loi de probabilités d'une variable aléatoire ?

- Si X est une variable aléatoire **discrète**, sa loi est définie par un tableau (ex : lancer d'un dé pipé) ou une formule générale (ex : loi binomiale ou équiprobabilité).
- Si X est une variable aléatoire **continue**, alors $\forall k \in \mathbb{R}$, $P(X = k) = 0$, et on définie la loi de X grâce à une fonction, appelée **densité de la loi de probabilité de** X, permettant de calculer $P(X \in I)$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

I 4 Densité de probabilité

Définition

Soit I un intervalle (borné ou non) de $\mathbb{R}$.
On appelle **densité de probabilité sur** I toute fonction f définie sur I telle que :
- f est continue et positive sur I.
- L'aire sous la courbe C_f est égale à 1 u.a.

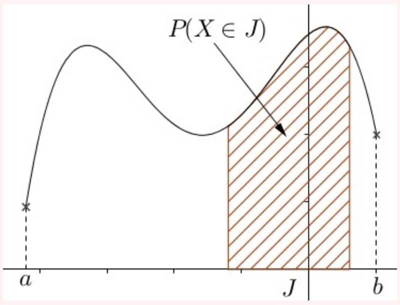
Remarque :
Si la première condition est vérifiée, alors la deuxième condition s'écrit aussi :

Si $I = [a; b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.   Si $I = [a; +\infty[$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

I 5 Loi à densité

Définition

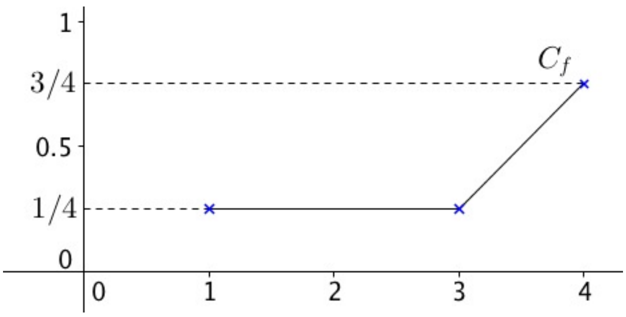
Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur un intervalle $I = [a; b]$.
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, la probabilité de l'événement « $X \in J$ » est l'aire du domaine $\{M(x; y),\ x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.



Remarque :
Puisque $\forall\, k \in I$, $P(X = k) = 0$, alors pour tous réels c et d de I tels que $c < d$, on a :

$$P(X \in [c; d]) = P(X \in [c; d[) = P(X \in]c; d]) = P(X \in]c; d[)$$

Exemple :



f est continue et positive sur $[1; 4]$, et $\displaystyle\int_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (4 carreaux).
Donc f est une densité de probabilité sur $[1; 4]$.
Soit X une variable aléatoire continue dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f sur $[1; 4]$:
$P(2 < X < 3) = \dfrac{1}{4}$

I 6 Calculs de probabilités

Propriété

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur I.
- Pour tout c de I, $P(X=c)=0$.
- Pour tous c et d de I, $P(X\in[c;d])=P(X\in[c;d[)=P(X\in]c;d])=P(X\in]c;d[)=\displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $I=[a;+\infty[$, avec $a\in\mathbb{R}$:

Pour tout c de I, $P(X\in[c;+\infty[)=P(X\geqslant c)=1-P(X<c)=1-\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

II Loi uniforme sur $[a;b]$

II 1 Définition

Exercice :
Soit f la densité de probabilité d'une probabilité uniforme sur $[a;b]$. Déterminer f.

Correction :
La probabilité étant uniforme sur $[a;b]$, alors f est une fonction constante. Soit k cette constante.
De plus, f étant une densité de probabilité sur $[a;b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$.
Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)=1\Leftrightarrow\int_a^b k\,\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow[kx]_a^b=1\Leftrightarrow kb-ka=1\Leftrightarrow(b-a)k=1\Leftrightarrow k=\frac{1}{b-a}\ (a\neq b)$.

Définition

La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi de probabilité de densité la fonction constante sur $[a;b]$ définie par $x\mapsto\dfrac{1}{b-a}$.

Remarque :
« Choisir un réel au hasard de $[a;b]$ », c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a;b]$.

II 2 Propriété

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui la une loi uniforme sur $[a;b]$.
Pour tous c et d de $[a;b]$ tels que $c\leqslant d$, $P(X\in[c;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\dfrac{d-c}{b-a}$.

Démonstration :

$$P(X\in[c\,;d])=\int_c^d\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d=\frac{d}{b-a}-\frac{c}{b-a}=\frac{d-c}{b-a}.$$

Exemple :

On choisit un nombre réel entre 0 et 1.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir $\frac{1}{4}$? (*Réponse : 0*)
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre compris entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$? (*Réponse :* $\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}{1-0}=\frac{1}{24}$.)

II 3 Espérance

II 3 a Espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $I=[a;b]$

Définition

Soit X une variable aléatoire à densité f sur $[a;b]$. Alors $E(X)=\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Raisonnement amenant à cette définition :

Si X était une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ... , x_n, alors on aurait $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, avec $p_i=P(X=x_i)$.

Si X est une variable aléatoire continue dont les valeurs sont prises dans $[a;b]$, alors chaque p_i est nul, mais la probabilité que X prenne une valeur proche de x est $f(x)\mathrm{d}x$ (aire du rectangle dans l'intervalle $[x;x+\mathrm{d}x]$).

D'où $E(X)=\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$.

II 3 b Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

Démonstration :

On utilise la propriété précédente, où f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$:

$$E(X)=\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b t\times\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

III Lois exponentielles

III 1 Définition

Définition

Soit λ un réel **strictement positif**.

La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité de densité la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

Remarque :
f est bien une fonction densité de probabilité :
- f est continue sur $[0;+\infty[$.
- $f \geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$ (car $\lambda > 0$).
- $\forall x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$ (car $\lambda > 0$), donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

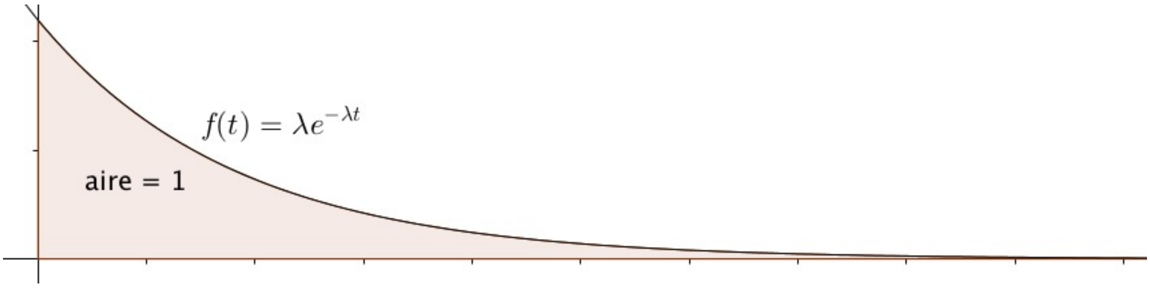


Figure réalisée sous Geogebra avec un curseur pour λ.

III 2 Propriété

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout intervalle $[c;d]$ de $[0;+\infty[$:
- $P(X \in [c;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- $P(X \leqslant c) = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $P(X \geqslant c) = e^{-\lambda c}$.

Démonstration :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- $P(X \leqslant c) = P(0 \leqslant X \leqslant c) = e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda c} = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $P(X \geqslant c) = 1 - P(X < c) = 1 - P(X \leqslant c) = 1 - (1 - e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c}$.

Exemple :

La variable aléatoire X égale à la durée de vie en jours d'un atome radioactif d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle.
On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 2 jours est égale à $0,160$ à 10^{-3} près.

1. Calculer, à 10^{-3} près, le paramètre λ de la loi.
2. La demi-vie d'une substance radioactive est le temps t au bout duquel la moitié des atomes initiaux sont désintégrés. Calculer la demi-vie de l'iode 131 (en jours).

Correction :

1. On a $P(X \leqslant 2) \approx 0,160$.
   Donc $1 - e^{-2\lambda} \approx 0,160$.
   Donc $e^{-2\lambda} \approx 0,840$.
   Donc $\lambda \approx \dfrac{-\ln(0,840)}{2}$ soit $\lambda \approx 0,087$.
2. On cherche t tel que $P(X \leqslant t) = \dfrac{1}{2}$, donc $1 - e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2}$ donc $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{\ln 2}{0,087} \approx 8$ jours.

III 3 Durée de vie sans vieillissement

Propriété

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :
Pour tous t et h strictement positifs, $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$.

Démonstration :

$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P(T \geqslant t \cap T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}$$
$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t} \text{ (car } h>0)$$
$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geqslant h).$$

Exemple :
La durée de vie T en année d'un composant radioactif suit une loi exponentielle.
Sachant que le composant ne s'est pas désintégré au bout de 2 000 ans, la probabilité qu'il ne se désintègre pas au bout de 3000 ans est : $P_{(T>2000)}(T>3000) = P(T>1000)$, soit la probabilité qu'il ne se désintègre pas au bout de 1000.

III 4 Espérance

III 4 a Espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $I = [a;+\infty[$

Définition

Soit X une variable aléatoire à densité f sur $I = [a;+\infty[$. Alors $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

III 4 b Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration (BAC) :

Calculons $\displaystyle\int_a^x t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$: soit ϕ la fonction définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par $\phi(t) = te^{-\lambda t}$.
ϕ est dérivable sur I et pour tout t de I, $\phi'(t) = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}$. Donc $\lambda te^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - \phi'(t)$.
Ainsi, les fonctions $t \mapsto \lambda te^{-\lambda t}$ et $t \mapsto e^{-\lambda t} - \phi'(t)$ admettent une même primitive sur I.
Or une primitive de $t \mapsto e^{-\lambda t} - \phi'(t)$ sur I est $t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - \phi(t)$ soit $t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}$.
Donc $\displaystyle\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}\right]_0^x = \int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.
Or $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.