PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Probabilités - Chapitre 1

Table des matières

I Introduction : la loi binomiale

Exercice

Dans un élevage d'animaux, on effectue un test vétérinaire.
La probabilité que ce test soit positif est de $0,05$.
On choisit 10 animaux au hasard dans l'élevage. On estime ce nombre suffisamment grand pour l'assimiler à la répétition de 10 épreuves identiques et indépendantes.
X est la variable aléatoire donnant le nombre d'animaux ayant un test positif parmi les 10 animaux.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Déterminer la probabilité que 4 animaux exactement sur 10 aient un test positif.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins un animal sur les dix ait un test positif.
4. Calculer l'espérance $E(X)$ de X et interpréter le résultat.

Rappels de cours :

• **Épreuve de Bernoulli de paramètre p :**
Expérience aléatoire qui ne compte que deux issues :
- S, appelée succès, de probabilité p.
- $\overline{S}$, appelée échec, de probabilité $1 - p$.

• **Schéma de Bernoulli de paramètres n et p :**
Expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de manière **identique et indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

• **Loi binomiale de paramètres n et p :**
Loi de la variable aléatoire X égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On la note $B(n;p)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;1]$.

• **Calculs de probabilité :**
Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors X prend les valeurs $\{0\,;\,1\,;\ldots;n\}$ et pour tout entier k de 0 à n, on a : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
• **Espérance et variance :**
On a de plus $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

• **Coefficients binomiaux :**
Pour tout entier k compris entre 0 et n, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès parmi la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ (Formule de Pascal)}$$

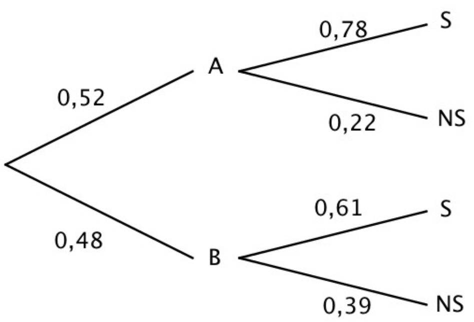
II Exemple

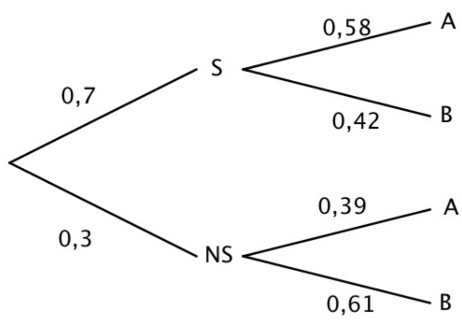
Une enquête de marketing porte sur le choix entre deux abonnements de forfait mobile, A et B, et sur le statut de l'acheteur, salarié ou non. On admet la répartition suivante :

	A	**B**	*Total*
S	4560	3250	7810
NS	1320	2100	3420
Total	5880	5350	11230

II 1 Construction d'un arbre pondéré représentant la situation

On construit un arbre pondéré en prenant des valeurs approchées à $0,01$ près pour le calcul des probabilités.
Deux possibilités :





II 2 Probabilités conditionnelles

0,78 représente la proportion de salariés parmi les personnes ayant pris un abonnement A,
ou la probabilité d'être salarié **sachant** qu'on a pris un abonnement A.

On note : $P_A(S) = 0,78$. De même, $P_S(A) = 0,58$.

II 3 Calculs de probabilités

Calculer la probabilité d'être salarié **et** d'avoir un abonnement A.

A partir du tableau :
$P(A \cap S) = \dfrac{4560}{11230} \approx 0,41$

Avec le premier arbre :
$P(A \cap S) = 0,52 \times 0,78 = 0,41$

Avec le deuxième arbre :
$P(A \cap S) = 0,7 \times 0,58 = 0,41$

(*Faire apparaitre dans l'arbre les probabilités conditionnelles et le sens de chaque branche*)

III Probabilités conditionnelles

III 1 Définition et notation

Définition

Soient A et B deux événements, A de probabilité non nulle.
On appelle probabilité de B sachant A, et on note $P_A(B)$ le réel de $[0\,;1]$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si A et B sont de probabilités non nulles, alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

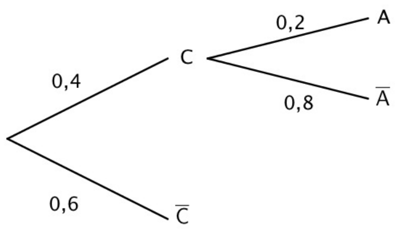
Exemple :

Une société comprend 40% de cadres, 20% d'entre eux parlant anglais. On interroge au hasard un employé de la société.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'employé interrogé soit un cadre qui parle anglais.

Correction :

1. Soit C l'événement « L'employé interrogé est un cadre » et A « L'employé parle anglais »



2. La probabilité cherchée est $P(A \cap C) = P(C) \times P_C(A) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$

Suite de l'exemple :

On suppose de plus que 30% des employés sont des personnes non cadres et parlant anglais.

3. Calculer la probabilité que la personne interrogée parle anglais, sachant qu'elle n'est pas cadre.
4. Calculer la probabilité que la personne interrogée parle anglais.

III 2 Théorème des probabilités totales

Dans la dernière question, on vient d'appliquer la formule dite des **probabilités totales** :

Théorème (admis)

Si l'univers Ω d'une expérience aléatoire est la réunion d'événements A_1, A_2, ..., A_n deux à deux incompatibles, alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

Avec pour tout entier k de 1 à n, $P(A_k) \neq 0$ et $P(B \cap A_k) = P(A_k) \times P_{A_k}(B)$

Remarque :
On dit que $\{A_1; A_2; ...; A_n\}$ est une partition de l'univers Ω.

Exemple :
A un carrefour doté d'un feu tricolore :
• 2% des véhicules s'arrêtent au feu vert.
• 65% des véhicules s'arrêtent au feu orange.
• 97 % des véhicules s'arrêtent au feu rouge.
On observe le comportement d'un véhicule se présentant au carrefour.
On admet que l'état du feu à l'arrivée du véhicule est aléatoire et que la probabilité que le feu soit vert est de 0,6 , celle qu'il soit orange de 0,1 et celle qu'il soit rouge de 0,3.

1. Quelle est la probabilité que le véhicule observé s'arrête ?
2. Le véhicule est passé. Quelle est la probabilité qu'il l'ait fait au feu rouge ?

Correction : *Faire un arbre, déjà V, O, R, puis A ou $\overline{A}$*

1. $P(A) = P(A \cap V) + P(A \cap O) + P(A \cap R) = ... = 0,368$.
2. La probabilité cherchée est $P_{\overline{A}}(R)$.
   Or $P(\overline{A} \cap R) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R)$ donc $P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{P(\overline{A} \cap R)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(R) \times P_R(\overline{A})}{1 - P(A)} = \dfrac{0,3 \times 0,03}{1 - 0,368} \approx 0,014$

IV Indépendance de deux événements

IV 1 Exemple

Soit une urne remplie de 100 boules numérotées 1 ou 2, indiscernables au toucher.
• 60 sont rouges, dont k avec le numéro 1.
• 40 sont vertes, dont $30 - k$ avec le numéro 1.

On tire une boule au hasard dans l'urne. On note :
N_1 l'événement « La boule tirée porte le numéro 1 » ;
R l'événement « La boule tirée est rouge ».

On a $P(N_1) = \dfrac{30}{100} = 0,3$ et $P_R(N_1) = \dfrac{k}{60}$

On a donc $P(N_1) = P_R(N_1) \Leftrightarrow \dfrac{k}{60} = 0,3 \Leftrightarrow k = 18$.
Ainsi, pour $k = 18$, $P(N_1) = P_R(N_1)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une boule numérotée 1 est la même si on tire une boule parmi les rouges ou parmi l'ensemble des boules. Elle ne **dépend pas** de la population. On dit que les événements R et N_1 sont indépendants.

IV 2 Définition

Définition

Soient A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque :
Si A et B sont de probabilités non nulles :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$

IV 3 Une propriété

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Démonstration (BAC) :

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
donc si A et B sont indépendants : $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - p(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$, donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Remarque :
De même, on peut montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.