PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Géométrie - Chapitre 4

Table des matières

Exercices : ex 1, 2 et 3 page 320.

I Norme d'un vecteur de l'espace

I 1 Définitions

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace, et $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{u}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la distance AB et on note : $||\overrightarrow{u}|| = AB$.

Définition

Un repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit **orthonormé** si, en posant $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$, on a :
- (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux.
- $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$.

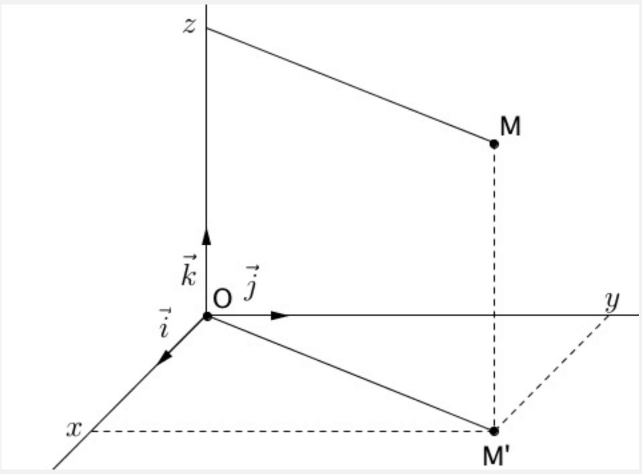
I 2 Norme et distance

Théorème

Soit $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ un vecteur de l'espace dans un repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **orthonormé**.
Alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque :
Cette propriété n'est vraie que dans un repère **orthonormé** !!

Démonstration :



Soit $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ un vecteur de l'espace.
On pose M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ $(= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k})$.
Soit M' le projeté orthogonal de M sur $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Alors $OM'M$ est rectangle en M'.
Donc $OM^2 = OM'^2 + M'M^2 = (x^2 + y^2) + z^2$. D'où le résultat.

Conséquence : distance entre deux points

Soit $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$ deux points de l'espace dans un repère orthonormé.
Alors $MM' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$.

II Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

II 1 Définition

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Dans l'espace, une unité de longueur étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **réel** noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Remarque :
Les expressions du produit scalaire établies dans le plan sont encore valables dans l'espace :
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. (Et ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$.)
- Si dans un plan P, H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

II 2 Expression analytique

Théorème

Soit $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère **orthonormé** de l'espace.
Soit $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace.
Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx'+yy'+zz'$.

Démonstration :

$||\overrightarrow{u}||^2 = x^2+y^2+z^2$, $||\overrightarrow{v}||^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ et $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2$.
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-x^2-y^2-z^2-x'^2-y'^2-z'^2\right) = ... = xx'+yy'+zz'$

II 3 Propriétés du produit scalaire

II 3 a Symétrie

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.

II 3 b Linéarité

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de l'espace et λ un réel.
Alors $\lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

Démonstration :

Faire la démonstration de ces deux propriétés dans le cadre d'un R.O.N. à l'aide de l'expression analytique.

III Vecteurs et orthogonalité dans l'espace

III 1 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux si l'un des deux est nul ou si deux droites dont ils sont vecteurs directeurs sont perpendiculaires. (cf. Chapitre 1, III)

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration :

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
D'où :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{u}|| = 0$ ou $||\overrightarrow{v}|| = 0$ ou $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

III 2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété

Soit Δ une droite et P un plan de l'espace.
Δ est orthogonale à toute droite du plan P si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites **sécantes** de ce plan.

Démonstration EXIGIBLE BAC :

Soit d et d' deux droites sécantes du plan P telles que $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$.
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ des vecteurs directeurs de Δ, d et d'. Ainsi $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v'}$.
De plus, d et d' étant sécantes, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ est un couple de vecteurs non colinéaires de P.
Soit alors D une droite quelconque de P, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
$\overrightarrow{w}$ est un vecteur de P donc il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v'}$.
Donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = a(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + b(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'} = a \times 0 + b \times 0 = 0$ (car $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v'}$)
Donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$ donc $\Delta \perp D$.

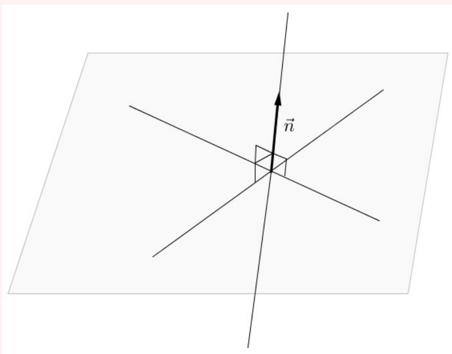
IV Vecteur normal à un plan ; équation cartésienne du plan

IV 1 Vecteur normal à un plan

IV 1 a Définition

Définition

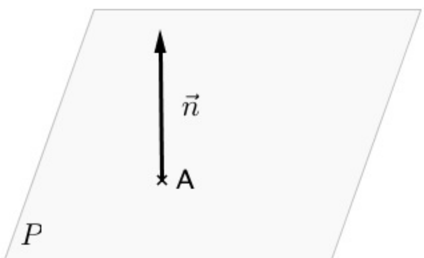
Soit P un plan.
On appelle **vecteur normal à** P tout vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ d'une droite perpendiculaire à P.



Remarques :
- Un vecteur normal à P est non nul.
- Les vecteurs normaux à P sont colinéaires.
- Toute droite incluse dans P a ses vecteurs directeurs orthogonaux aux vecteurs normaux de P.

IV 1 b Caractérisation d'un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et A un point de P.
$M \in P \Leftrightarrow A = M$ ou $(AM) \subset P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.



Conséquence

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

IV 2 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$, avec a, b et c des réels non tous nuls.
Alors une équation cartésienne du plan P est de la forme $ax+by+cz+d=0$, $d \in \mathbb{R}$.

Démonstration EXIGIBLE BAC :

Soit P le plan passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$, de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.
Pour tout point $M(x;y;z)$, on a :
$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
$M \in P \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$
$M \in P \Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A)=0$.
$M \in P \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$, en posant $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Propriété réciproque

Soit P un plan ayant pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
Alors le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal à P.

Démonstration :

Soit E l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$.
Les réels a, b et c sont non tous nuls ; supposons donc que $a \neq 0$.
Le point $A\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ est un point de E.
$\vec{n}.\overrightarrow{AM} = a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz = ax+by+cz+d$.
Ainsi, $M \in E$ équivaut à $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$.
Donc E est le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemples :

- Le plan P d'équation cartésienne $2x+y-5=0$ passe par $A(0;5;0)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(2;-1;0)$.
- Soit $A(1;-3;2)$ et $\vec{n}(-1;1;4)$, et soit P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
  1. Déterminer une équation cartésienne de P.
  2. Montrer que $B(3;1;0) \notin P$.
  3. Déterminer l'équation cartésienne du plan P' passant par B et parallèle à P.

Correction :

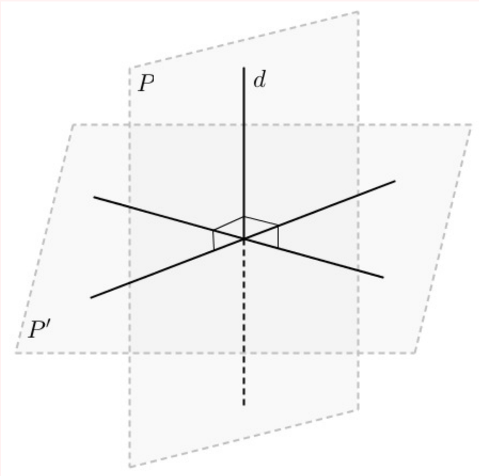
1. $M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)+(y+3)+4(z-2)=0$. Donc $P : -x+y+4z-4=0$.
2. $-3+1-4 \neq 0$ donc $B \notin P$.
3. $\vec{n}$ est un vecteur normal de P et $P//P'$ donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de P'.
   Donc $M(x;y;z) \in P' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -(x-3)+(y-1)+4z=0$. Donc $P : -x+y+4z+2=0$.

IV 3 Plans perpendiculaires

IV 3 a Définition

Définition

On dit que deux plans sont perpendiculaires si un des plans contient une droite orthogonale à l'autre.



Remarque importante :
Toute droite de l'un n'est pas orthogonale à toute droite de l'autre ! (Ex : la droite d'intersection)

IV 3 b Caractérisation

Caractérisation (admise)

Soit P et P' deux plans ayant pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
Alors P et P' sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.