NOMBRES COMPLEXES

Géométrie - Chapitre 3

Table des matières

I Activité d'introduction **2**
- I 1 Exemple 1 : quand tout se passe bien . . . 2
- I 2 Exemple 2 : quand ça se passe (un peu) moins bien . . . 2

II Un peu d'histoire **3**
- II 1 Chronologie des ensembles de nombres . . . 3
- II 2 La querelle de Fontana et Cardan . . . 3

III L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes **4**
- III 1 Définitions . . . 4
- III 2 Somme et produit . . . 4
- III 3 Conjugué d'un nombre complexe . . . 5
  - III 3 a Définition . . . 5
  - III 3 b Propriétés . . . 5
- III 4 Quotient . . . 6

IV Équations du second degré à coefficients réels **6**
- IV 1 Équations $z^2 - a = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ . . . 6
- IV 2 Équations $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$ . . . 7
- IV 3 Autres équations dans $\mathbb{C}$ . . . 7

V Représentation géométrique d'un nombre complexe **8**
- V 1 Activité . . . 8
- V 2 Affixe d'un point dans le plan complexe . . . 8
- V 3 Affixe d'un vecteur . . . 9

VI Forme trigonométrique d'un nombre complexe **9**
- VI 1 Quelques points d'affixes connus . . . 10
- VI 2 Module d'un nombre complexe . . . 10
- VI 3 Argument d'un nombre complexe non nul . . . 11
- VI 4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul . . . 11
  - VI 4 a Définition . . . 11
  - VI 4 b Lien entre la forme algébrique et la forme trigonométrique . . . 12
- VI 5 Propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe . . . 12
- VI 6 Interprétation géométrique du module et de l'argument . . . 12

VII La notation exponentielle **13**
- VII 1 La notation $e^{i\theta}$ . . . 13
- VII 2 Lien avec les formules de trigonométrie . . . 13
  - VII 2 a Formules d'addition . . . 13
  - VII 2 b Formules de duplication . . . 14
- VII 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul . . . 14

I Activité d'introduction

Jérome Cardan (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage *Ars Magna*, une formule pour déterminer une solution x_0 de l'équation $x^3 + px + q = 0$, dans le cas où $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$:

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

I 1 Exemple 1 : quand tout se passe bien

On considère l'équation $x^3 - 36x - 91 = 0$.

1. Vérifier que, dans ce cas, $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$.
2. Appliquer la formule de Cardan afin de déterminer une solution x_0 de cette équation.
3. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, $x^3 - 36x - 91 = (x - x_0)(x^2 + ax + b)$
4. Achever alors la résolution de l'équation $x^3 - 36x - 91 = 0$. Combien a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

I 2 Exemple 2 : quand ça se passe (un peu) moins bien

On considère l'équation $(E) : x^3 - 15x - 4 = 0$.

1. Calculer $4p^3 + 27q^2$. Peut-on appliquer la formule de Cardan à cette équation ?
2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de cette équation.
3. Pour résoudre cette équation malgré le problème posé par le signe de $4p^3 + 27q^2$, Cardan utilise des racines de nombres négatifs. Plus tard, Raffaelle Bombelli (1526-1572) introduira un nombre « imaginaire », que nous noterons i, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
   Ainsi, dans le cas présent, on peut écrire $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} = -121 = 11^2 \times \mathrm{i}^2 = (11\mathrm{i})^2$.
   (a) En utilisant le nombre i, démontrer que pour déterminer la solution de l'équation (E) par la formule de Cardan, il suffit de trouver deux nombres « imaginaires » dont les cubes s'écrivent $2 + 11\mathrm{i}$ et $2 - 11\mathrm{i}$.
   (b) En utilisant les opérations de calcul des nombres réels et l'égalité $\mathrm{i}^2 = -1$, démontrer que :
   $$(2 + \mathrm{i})^3 = 2 + 11\mathrm{i} \quad \text{et} \quad (2 - \mathrm{i})^3 = 2 - 11\mathrm{i}.$$
   (c) En déduire que 4 est la valeur donnée par la formule de Cardan pour l'équation (E).
   (d) Vérifier que 4 est bien solution de l'équation (E).
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + ax + b)$.
5. Achever la résolution de l'équation (E).

II Un peu d'histoire

II 1 Chronologie des ensembles de nombres

⇒ Travail dans $\mathbb{N}$, muni d'une addition et d'une multiplication (qui découle de l'addition).
⇒ La mesure des grandeurs amène à travailler sur les fractions des nombres positifs : $\mathbb{Q}_+$.
⇒ Avec les nombres négatifs associés, les opérations $+, -, \times, \div$ sont toujours possibles, sauf la division par 0. (Notion de « corps »)
⇒ La création des complexes a précédé la création des réelles (faite à partir des rationnels) :
Cardan (mathématicien italien du XVIe siècle) publie une méthode de résolution des équations du 3e degré (découverte dans l'activité précédente), qui l'amène à envisager des nombres « impossibles », ou « imaginaires », considération reprise et précisée par **Bombelli**, un de ses disciples.
Ces nombres (ex : $\sqrt{-4}$) convenablement manipulés conduisent à des résultats réels corrects : des résultats « vrais » peuvent être atteints par des opérations sur des nombres « imaginaires ».
⇒ Au milieu du XVIe siècle, **Cardan** et **Tartaglia** publient des formules donnant les solutions d'équations du troisième degré.
⇒ **Bombelli** note des paradoxes dans ces formules et en 1572 propose la notation « $\sqrt{-1}$ » pour lever ces problèmes.
⇒ en 1777, **Euler** déclare que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction : $(\sqrt{-1})^2 = -1$ par définition, or $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1$ en appliquant les propriétés sur les racines carrées. Il introduit donc la notation i qui désigne le nombre vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.
⇒ Utiliser avec une confiance grandissante aux XVIIe et XVIIIe siècles, les nombres imaginaires trouvèrent leur statut définitif au XIXe siècle par l'allemand **Gauss**, sous le nom de « nombres complexes ».

Historiquement : $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R}$
Algébriquement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

II 2 La querelle de Fontana et Cardan

Au XVIe siècle, les mathématiciens se défiaient lors de concours mathématiques publics, au cours desquels ils montraient leur habileté [1]. Ils avaient ainsi pour habitude de garder secrètes leurs découvertes.
Au cours de l'un de ces concours, le mathématicien Niccolo Fontana dit Tartaglia (« Le Bègue ») (1499-1557) trouva en 1534 une méthode générale pour résoudre les équations du type $x^2 + px + q = 0$. Il semble qu'il ait été le premier à utiliser pour cela la racine carrée d'un nombre négatif. Il garda sa méthode secrète, mais accepta de la dévoiler à Cardan, à la condition que celui-ci la garde secrète.
Cardan développa la méthode de Fontana et réussit à l'étendre à toute équation du 3e degré et du 4e degré (avec son assistant Ferrari). Apprenant que la méthode de Fontana avait été découverte avant celui-ci par Scipione del Ferro, il passa outre sa promesse et publia ces résultats dans son *Ars magna* (1545).
Dans *Quesiti et invenzioni diverse* (1546), Fontana attaqua violemment Cardan ; il s'ensuivit une longue querelle avec Cardan et Ferrari. Celle-ci prit fin au cours d'un concours entre Fontana et Ferrari, que Ferrari gagna.
C'est finalement le nom de Cardan qui resta associé à cette méthode de résolution.

1. Tiré du manuel Transmath 2012, Nathan

III L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

III 1 Définitions

Définition

• Un nombre complexe est un nombre de la forme $x + y\mathrm{i}$, où x et y sont des réels et i un nombre imaginaire tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
• L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
• L'écriture $x + y\mathrm{i}$ avec x et y réels est unique et appelée la **forme algébrique** du nombre complexe.

Remarque (propriété) :
Pour tout réel x, $x = x + 0 \times \mathrm{i}$, donc tout réel x appartient aussi à $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Vocabulaire :
Si z est un nombre complexe tel que $z = x + y\mathrm{i}$, avec x et y des réels, alors :
• x est appelée la **partie réelle** de z et on la note $x = \mathrm{Re}(z)$.
• y est appelée la **partie imaginaire** de z et on la note $y = \mathrm{Im}(z)$.
• Tout nombre complexe de la forme $z = y\mathrm{i}$, $y \in \mathbb{R}$ est appelé **imaginaire pur**.

Conséquences :
Soit z un nombre complexe.
• $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
• z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Exemples :
• $3 + 4\mathrm{i}$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.
• $\sqrt{2}$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.
• $-3\pi\mathrm{i}$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.
• $2 + \mathrm{i}^2$ est un nombre complexe dont la forme algébrique est 1.

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Autrement dit, si $z = x + y\mathrm{i}$ et $z' = x' + y'\mathrm{i}$, alors $z = z'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Remarque :
Si $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, alors $z = 0$ si et seulement si $x = y = 0$.

III 2 Somme et produit

Propriété

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Exemples :
• $(1 + 2\mathrm{i}) + (-3 + 4\mathrm{i}) = -2 + 6\mathrm{i}$.
• $(1 + 2\mathrm{i}) \times (-3 + 4\mathrm{i}) = -3 - 6\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2 = -11 - 2\mathrm{i}$.
• $(-1 + \mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2\mathrm{i}$.
• $(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i}) = 1 - (4\mathrm{i})^2 = 1 + 4 = 5$.

Exemples :

- Écrire sans racine au dénominateur : $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\dfrac{-3}{4+\sqrt{3}}$.
- Rechercher l'inverse de $1+\mathrm{i}$.
- Rechercher l'inverse de $2-3\mathrm{i}$.

III 3 Conjugué d'un nombre complexe

III 3 a Définition

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+y\mathrm{i}$, avec x et y des réels.
On appelle **conjugué de** z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$.

Exemples :

- $\overline{3+2\mathrm{i}}=3-2\mathrm{i}$
- $\overline{\mathrm{i}-1}=-\mathrm{i}-1$
- $\overline{-4}=-4$
- $\overline{3\mathrm{i}}=-3\mathrm{i}$

Conséquence :
Si $z=x+y\mathrm{i}$, alors $z+\overline{z}=2x$ et $z-\overline{z}=2y\mathrm{i}$ d'où :

$$\boxed{z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)} \quad \text{et} \quad \boxed{z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)}.$$

Il en résulte que :
- Le nombre complexe z est réel si et seulement si $z=\overline{z}$.
- Le nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z+\overline{z}=0$.

III 3 b Propriétés

Propriétés

Soit $z=x+y\mathrm{i}$ un nombre complexe, avec x et y des réels.
- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\overline{z}=(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})=x^2+y^2$

Exemples :
- $(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})=9+4=13$
- $(\sqrt{2}-\mathrm{i})(\sqrt{2}+\mathrm{i})=2+1=3$

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes.
Alors $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z'\neq 0$.

Démonstration :

Posons $z=x+y\mathrm{i}$ et $z'=x'+y'\mathrm{i}$, avec x, y, x' et y' des réels.

- *A faire en exercice*

- $zz'=(x+y\mathrm{i})(x'+y'\mathrm{i})=(xx'-yy')+(xy'+x'y)\mathrm{i}$ donc $\overline{zz'}=(xx'-yy')-(xy'+x'y)\mathrm{i}$.

D'autre part, $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$ et $\overline{z'}=x'-y'\mathrm{i}$.
Donc $\overline{z}\times\overline{z'}=(x-y\mathrm{i})(x'-y'\mathrm{i})=(xx'-yy')-(xy'+xy')\mathrm{i}$.
D'où $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$

Remarque :
Ces résultats s'étendent à une somme de n termes ou à un produit de n facteurs.
En particulier, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z non nul, on a :

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$$

Démonstration (exigible Bac !) :

A Faire en exercice !

III 4 Quotient

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$.
Alors $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$ donne la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$

Exemples :
- $\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{9+4} = \dfrac{3+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2}{13} = \dfrac{1}{13} + \dfrac{5}{13}\mathrm{i}$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{i}(z-3\mathrm{i}) = 2z - 1 + \mathrm{i}$

IV Équations du second degré à coefficients réels

IV 1 Équations $z^2 - a = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$

(*Pas d'énoncé de théorème, il est préférable de refaire la résolution complète à chaque fois*)

• Si $a > 0$:

$$\begin{aligned} z^2 - a = 0 &\Leftrightarrow (z-\sqrt{a})(z+\sqrt{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

• Si $a = 0$:
$z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = 0$

• Si $a < 0$:

$$\begin{aligned} z^2 - a = 0 &\Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}^2(-a) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - (\mathrm{i}\sqrt{-a})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \mathrm{i}\sqrt{-a})(z + \mathrm{i}\sqrt{-a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\mathrm{i}\sqrt{-a} \text{ ou } z = i\sqrt{-a} \end{aligned}$$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -5$.

IV 2 Équations $az^2+bz+c=0$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$

Théorème

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $az^2+bz+c=0$ admet **toujours** des solutions (réelles ou complexes).
Soit Δ le discriminant de az^2+bz+c.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle double : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \text{ car } a\neq 0.\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0
\end{aligned}$$

D'après le **IV 1** :

- Si $\Delta > 0$, $z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où le résultat.
- Si $\Delta = 0$, $z+\dfrac{b}{2a}=0$ d'où $z=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ d'où le résultat.

Remarque :
Dans le cas où $\Delta < 0$, on a $z_2 = \overline{z_1}$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 = -9$.
2. $z^2+2z+3=0$.
3. $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$.

IV 3 Autres équations dans $\mathbb{C}$

Exemples :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2+\mathrm{i})z-3=4\mathrm{i}z+1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+3\mathrm{i}=\mathrm{i}\overline{z}+2$.

V Représentation géométrique d'un nombre complexe

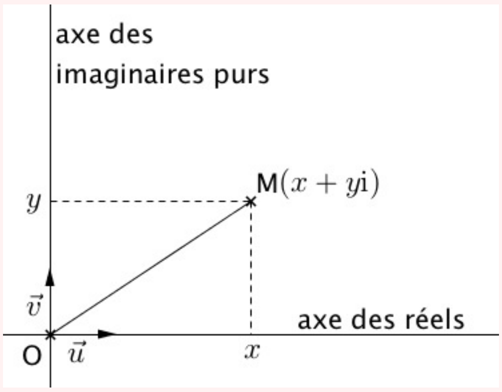
V 1 Activité

Activité 2 page 235 : Une représentation géométrique des nombres complexes.

V 2 Affixe d'un point dans le plan complexe

Définition

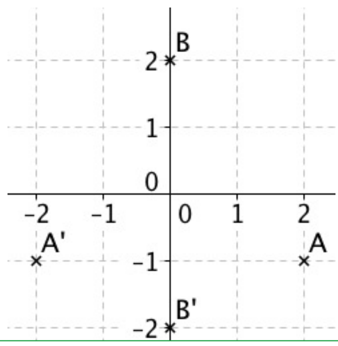
Le plan est mini d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit $z = x + y\mathrm{i}$ avec x et y deux réels.
On représente z par le point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
(C'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$)
On dit que $x + y\mathrm{i}$ est l'**affixe** du point M dans le plan complexe, et on note $M(z)$.



Conséquences :
- $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.
- Le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

Exemples :

1. Placer dans le plan complexe les points $A(2-\mathrm{i})$ et $B(2\mathrm{i})$.
2. Soit A' le symétrique de A par rapport à l'axe (Oy) et B' le symétrique de B par rapport à l'axe (Ox). Déterminer les affixes de A' et B'.



V 3 Affixe d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{w}$ un vecteur.
L'affixe de $\vec{w}$ est l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$.
On note : $z_{\vec{w}} = z_{\overrightarrow{OM}} = x + y\text{i}$, si $M(x;y)$ dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ et $\vec{w}(z_{\vec{w}})$.

Propriété

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.
Alors $\overrightarrow{MM'}(z'-z)$.

Démonstration :

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe avec $z = x + y\text{i}$ et $z' = x' + y'\text{i}$ (x, y, x' et y' des réels).
$M(x;y)$ et $M'(x';y')$ donc $\overrightarrow{MM'}(x'-x;y'-y)$.
Donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $x' - x + \text{i}(y'-y) = x' + y'\text{i} - (x + y\text{i}) = z' - z$.

Propriété (admise)

Soient $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ deux vecteurs ayant pour affixes respectives z et z'.
- $\vec{w} = \vec{w'}$ si et seulement si $z = z'$.
- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

Propriété (milieu d'un segment)

Soient A et B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. Alors $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration :

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$, donc $2(z_I - z_A) = z_B - z_A$, d'où $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

VI Forme trigonométrique d'un nombre complexe

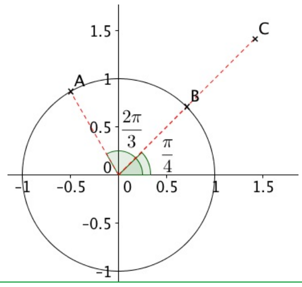
Dans cette partie, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

VI 1 Quelques points d'affixes connus

Exemples :

Placer, en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas, les points :

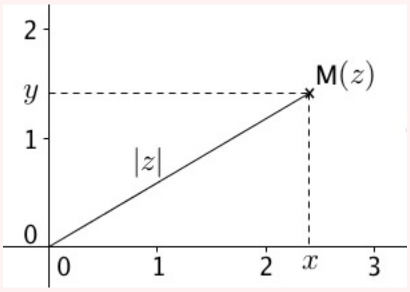
$A(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})$ $\quad B(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})$ $\quad C(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})$.



VI 2 Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $M(z)$ un point dans le plan complexe.
On appelle **module de** z et on note $|z|$ la distance OM.



Propriété

Soit $z = x + y\mathrm{i}$ un nombre complexe avec x et y des réels.
Alors $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z\overline{z} = |z|^2$

Démonstration :

- $OM^2 = x^2 + y^2$ donc $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $z\overline{z} = (x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) = x^2 - y^2\mathrm{i}^2 = x^2+y^2 = |z|^2$.

Conséquence :

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Remarque :

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $z = x + 0\mathrm{i} = x$ donc $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue de x).

Propriété (admise)

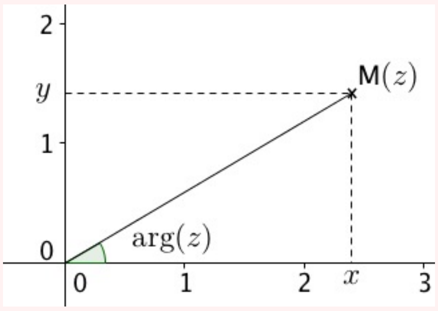
Soit z un nombre complexe.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$

VI 3 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit $M(z)$ un point du plan complexe, distinct de l'origine O (c'est-à-dire $z \neq 0$).
On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque :
Un nombre complexe a une infinité d'arguments, qui diffèrent d'un multiple de 2π.

Propriété

Soit $z = x + y\mathrm{i}$ un nombre complexe non nul, avec x et y des réels.
Alors $\cos(\arg(z)) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\arg(z)) = \dfrac{y}{|z|}$.

Démonstration :

Posons $\theta = \arg(z)$.
On a d'après la trigonométrie $\cos\theta = \dfrac{x}{OM}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{OM}$ d'où le résultat.

Exemples :

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants : 3 ; -4 ; $2\mathrm{i}$; $-1+\mathrm{i}$; $2-2\mathrm{i}$.
2. Faire une figure et vérifier les réponses du a).
3. Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z = -1 + 2\mathrm{i}$ au moyen de la calculatrice.

Propriété (admise)

Soit z un nombre complexe non nul.
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

VI 4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

VI 4 a Définition

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, r le module de z et θ un argument de z.
Alors $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z.

VI 4 b Lien entre la forme algébrique et la forme trigonométrique

Si z a pour forme algébrique $x + yi$ et pour forme trigonométrique $r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ (avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$), alors :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Exemples :

Soit $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, z_2 le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$, $z_3 = -2(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$ et $z_4 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})$.
Donner la forme trigonométrique de z_1, la forme algébrique de z_2 et les formes trigonométriques de z_3 et z_4.

VI 5 Propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes (non nuls pour les formules d'arguments).
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg z^n = n\arg z$.

Démonstration de la première (exigible BAC) :

$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$. Donc :
$zz' = |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta))$
$zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta'))$..
Donc $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z'$.

Démonstration des deux autres (exigible BAC) :

Exercices 128 et 130 page 254.

VI 6 Interprétation géométrique du module et de l'argument

Théorème

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Alors $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration :

On sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z_M - 0 = z_M$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Donc $z_M = z_B - z_A$.
Ainsi, $|z_M| = |z_B - z_A|$. Or par définition, $|z_M| = OM$ et $OM = AB$, donc $AB = |z_B - z_A|$.

Théorème

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, tels que $A \neq B$.
Alors $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

Démonstration :

On sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Comme précédemment, $z_M = z_B - z_A$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OM}) = (\vec{u},\overrightarrow{AB})$.
Or $(\vec{u},\overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$. Donc $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_M) = arg(z_B - z_A)$.

VII La notation exponentielle

VII 1 La notation $e^{\mathrm{i}\theta}$

Définition

On note, pour tout réel θ, $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Conséquence :
Tout nombre complexe de module 1 se note $e^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemples :

$e^{\mathrm{i}0} = 1$; $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$; $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Exemples :

Reprendre les formes trigonométriques de l'ex. 34 page 245 et déterminer les notations exponentielles correspondantes.

VII 2 Lien avec les formules de trigonométrie

VII 2 a Formules d'addition

Propriété

Pour tous réels θ et θ', les formules d'addition s'écrivent : $e^{\mathrm{i}\theta}.e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.

Démonstration :

$$\begin{cases} \cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' \end{cases}$$

Or $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$ d'où le résultat.

VII 2 b Formules de duplication

Propriété

Pour tout réel θ, les formules de duplication s'écrivent : $(e^{\mathrm{i}\theta})^2 = e^{2\mathrm{i}\theta}$.

Démonstration :

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

Or $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \mathrm{i}(2\cos\theta\sin\theta)$ d'où le résultat.

VII 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, r le module de z et θ un argument de z.
Alors $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ est la forme exponentielle de z.

Exemples :

1. Écrire sous forme algébrique : $3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{2}e^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$; $6e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
2. Écrire sous forme exponentielle : $5\mathrm{i}$; $4+4\mathrm{i}$; $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

Propriété

Pour tous réels r, r', θ et θ' :
- $re^{\mathrm{i}\theta}r'e^{\mathrm{i}\theta'} = rr'e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
- si $r' \neq 0$, $\dfrac{re^{\mathrm{i}\theta}}{r'e^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(re^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$

Démonstration :

immédiate à l'aide des calculs avec des exponentielles.