GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE

Géométrie - Chapitre 2

Table des matières

I Vecteurs de l'espace

I 1 Du plan à l'espace

On étend à l'espace :

I 1 a la notion de vecteur

I 1 b les opérations associées

- addition de deux vecteurs.
- multiplication d'un vecteur par un réel.

Les règles de calcul sont les mêmes que dans le plan, et la relation de Chasles aussi :

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

I 1 c la notion de vecteurs colinéaires

Définition

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Remarque importante :
L'égalité vue en géométrie plane $xy'-x'y=0$ n'a plus de sens dans l'espace !

Propriété

Soient A, B et C trois points de l'espace.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété

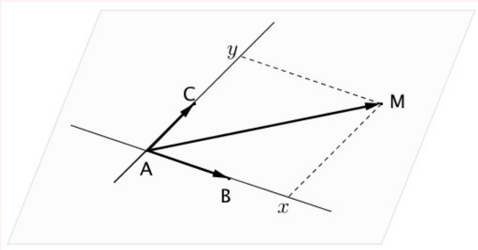
Soient A et B deux points de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$, t étant un réel quelconque.

I 2 Vecteurs coplanaires

I 2 a Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

Théorème

Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec x et y des réels quelconques.



Démonstration :

A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC). Donc M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe un couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Remarque :
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan (ABC), ou sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC). D'une manière générale, on peut énoncer :

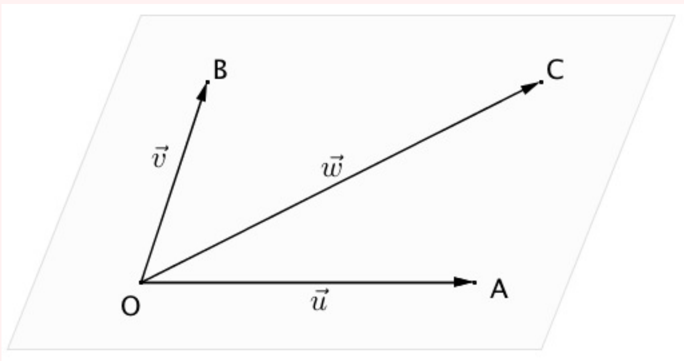
Définition et propriété

Un plan P de l'espace est caractérisé par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On dit alors que $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de P, et que $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de P.

I 2 b Vecteurs coplanaires

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires si et seulement si pour tout point O de l'espace, le point O et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.



Remarque :
Si deux vecteurs parmi les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont nécessairement coplanaires. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les points O, A et B sont alignés. Donc il existe au moins un plan qui contient la droite (OA) et le point C, et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc bien coplanaires.

Théorème

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}$.

Démonstration :

On reprend les notations de la figure ci-dessus.
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors ce sont deux vecteurs directeurs du plan (OAB).
Par définition, « $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires » signifie que C appartient au plan (OAB).
D'après le théorème du **a)**, il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$, soit $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}$.

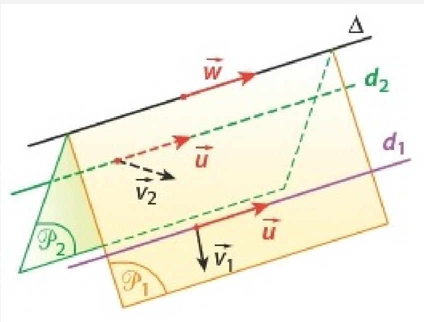
Conséquences :
- Quatre points A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Deux plans sont parallèles $\Leftrightarrow$ deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

I 2 c Théorème du toit

Théorème

Soit d_1 et d_2 deux droites parallèles, P_1 et P_2 deux plans distincts tels que d_1 est contenue dans P_1 et d_2 dans P_2.
Si P_1 et P_2 sont sécants, alors la droite Δ d'intersection est parallèle à d_1 et d_2.

Démonstration (BAC) :



Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 et d_2 (puisque les droites sont parallèles), et $\vec{w}$ un vecteur directeur de la droite Δ.

Soient alors $(\vec{u}, \vec{v_1})$ un couple de vecteurs directeurs de P_1 et $(\vec{u}, \vec{v_2})$ un couple de vecteurs directeurs de P_2.

La droite Δ est contenue dans le plan P_1, donc d'après le théorème vu en **b)**, il existe un couple $(x_1; y_1)$ tel que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v_1}$.
De même, la droite Δ étant contenue dans le plan P_2, il existe un couple $(x_2; y_2)$ tel que $\vec{w} = x_2\vec{u}+y_2\vec{v_2}$.
Ainsi, $x_1\vec{u} + y_1\vec{v_2} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v_2}$ soit $(x_1 - x_2)\vec{u} = y_2\vec{v_2} - y1\vec{v_1}$.
Si $x_1 \neq x_2$, alors $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont coplanaires. Ce qui est impossible car les plans P_1 et P_2 sont sécants.
Donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2 = 0$ car $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires.
En conclusion, $\vec{w} = x_1\vec{u}$ et Δ est parallèle à d_1 et d_2.

II Repérage dans l'espace

II 1 Repère de l'espace

Définition

Un repère de l'espace est composé d'un point O (origine du repère) et d'un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**. On note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère.
Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé une **base de vecteurs** de l'espace.

II 2 Coordonnées dans l'espace

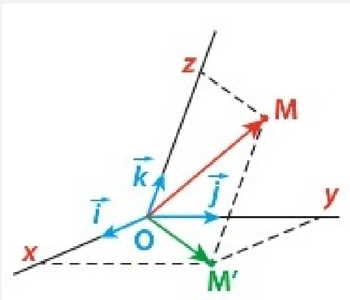
Théorème

Soit $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration :

- L'unicité est admise.

- Démontrons l'existence du triplet $(x; y; z)$.



Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant non coplanaires, le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et la droite $\Delta(M; \vec{k})$ ne sont pas parallèles.
Soit M' le point d'intersection plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de la droite Δ.
M' est un point du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, il existe donc un réel z tel que $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$.
Or d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Remarque :
$(x; y; z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** de M dans ce repère.

Définition

Soit $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère. Soit M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Par définition, les **coordonnées de** $\vec{u}$ sont les coordonnées $(x; y; z)$ du point M.
Ainsi, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

II 3 Décomposition d'un vecteur

Théorème (admis)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace **non coplanaires.**
Pour tout vecteur $\vec{V}$, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que $\vec{V}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$.
$(x;y;z)$ sont alors les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

II 4 Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats établis en géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une 3e coordonnée :

Dans un repère $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **:**
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$, alors :
- Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky;kz)$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y';z+z')$.

• Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A;y_A;z_A)$ et $x_B;y_B;z_B)$, alors :
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **:**
$||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$AB=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

III Représentations paramétriques

Dans toute cette partie, l'espace est muni d'un repère $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ quelconque.

III 1 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème

Soit d une droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$.
Alors d est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}.$$

Démonstration :

$M(x;y;z) \in d$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, si et seulement si :
$x - x_A = at$, $y - y_A = bt$ et $z - z_A = ct$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarques :
• Le système obtenu est appelé **une représentation paramétrique** de la droite d dans le repère $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
t est appelé le paramètre. (On peut utiliser toute autre lettre)
• A chaque valeur de t, on associe un point $M(x_A + at; y_A + bt; z_A + ct)$ et un seul.
Réciproquement, à chaque point M de d correspond une unique valeur de t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Conséquence :
Si $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique d'une droite d, alors on peut affirmer que d passe par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et que $\vec{u}(a;b;c)$ est un vecteur directeur de d.

Exemple :
Soit d une droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer les coordonnées d'un point M quelconque de la droite d.
2. Le point $P(-6;-4;-1)$ appartient-il à la droite d ?

Correction :

1. Prenons par exemple $t = 1$, on a alors $x = 2$, $y = 0$ et $z = 3$.
   Le point $M(2;0;3)$ appartient donc à la droite d.
2. P appartient à la droite d si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} -6 = 2t \\ -4 = t - 1 \\ -1 = t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

   On trouve alors $t = -3$, donc P est bien un point de la droite d.

Exemple :
Soit $A(1;-2;3)$ et $B(0;0;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).
2. $C(-3;6;-5)$ et $D(2;-5;5)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?
3. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Correction :

1. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) de coordonnées $(-1;2;-2)$. D'où une représentation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(ou bien } \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ avec le point B)}$$

2. • $C \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} -3 = 1 - t \\ 6 = -2 + 2t \\ -5 = 3 - 2t \end{cases}$ d'où $t = 4$ convient, donc $C \in (AB)$.

   • $D \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} 2 = 1 - t \\ -5 = -2 + 2t \\ 5 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \\ 5 = 3 - 2t \end{cases}$ donc $D \notin (AB)$.

3. $M(x;y;z) \in (AB) \cap (O;\vec{i},\vec{j}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ et $z = 0$

   $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 0$.

   Donc l'intersection cherchée est le point $M\left(-\dfrac{1}{2}; 1; 0\right)$.

III 2 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème

Soit P un plan caractérisé par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(\alpha;\beta;\gamma)$ non colinéaires.
Alors P est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha t' \\ y = y_A + bt + \beta t' \\ z = z_A + ct + \gamma t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}.$$

(représentation paramétrique de P)

Démonstration :

$M(x;y;z) \in P$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$, si et seulement si $x - x_A = at + \alpha t'$, $y - y_A = bt + \beta t'$ et $z - z_A = ct + \gamma t'$, d'où le résultat.