DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

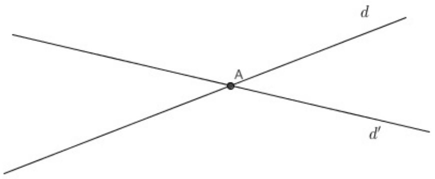
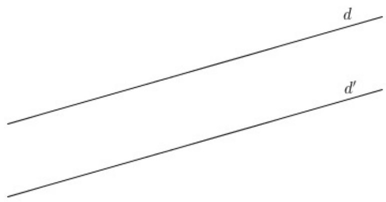
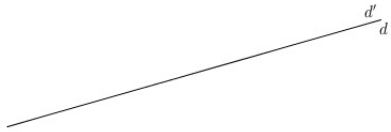
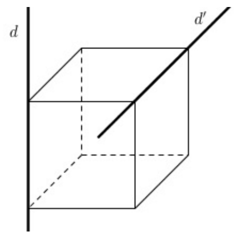
Géométrie - Chapitre 1

Table des matières

I Positions relatives

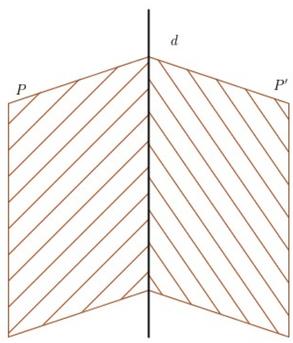
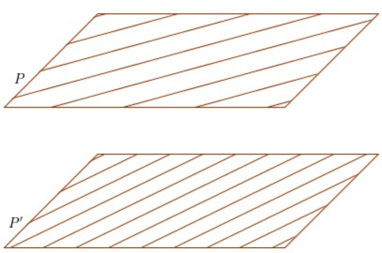
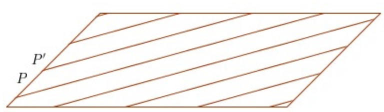
I 1 Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être :

<table>
<tr><th colspan="3">COPLANAIRES :</th></tr>
<tr><th>SÉCANTES</th><th colspan="2">PARALLÈLES</th></tr>
<tr>
<td>
$d \cap d' = \{A\}$
d et d' sont sécantes en A.</td>
<td>
$d \cap d' = \emptyset$
d et d' sont (strictement) parallèles.</td>
<td>
$d \cap d' = d = d'$
d et d' sont confondues.</td>
</tr>
<tr><th colspan="3">NON COPLANAIRES :</th></tr>
<tr><td colspan="3">
$d \cap d' = \emptyset$
d et d' sont non coplanaires.</td></tr>
</table>

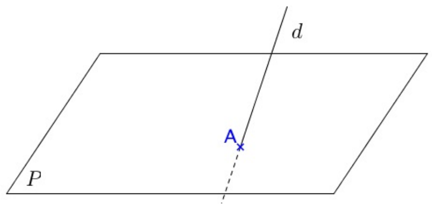
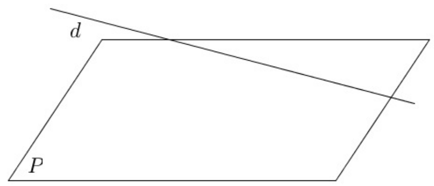
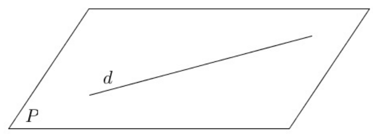
I 2 Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être :

<table>
<tr><th>SÉCANTS</th><th colspan="2">PARALLÈLES</th></tr>
<tr>
<td>
$P \cap P' = d$
P et P' sont sécants en d.</td>
<td>
$P \cap P' = \emptyset$
P et P' sont (strictement) parallèles.</td>
<td>
$P \cap P' = P = P'$
P et P' sont confondus.</td>
</tr>
</table>

I 3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace peuvent être :

SÉCANTS	**PARALLÈLES**	
 $d \cap P = \{A\}$ d et P sont sécants en A.	 $d \cap P = \emptyset$ d et P sont (strictement) parallèles.	 $d \cap P = d$ d est incluse dans P ($d \subset P$).

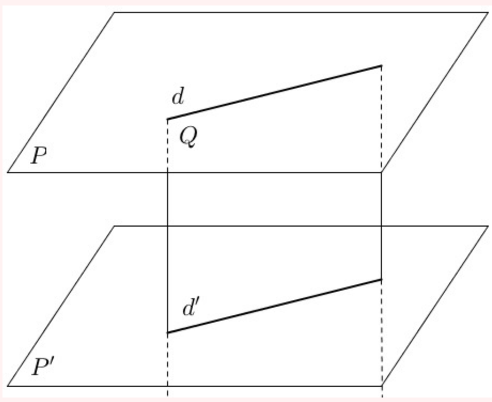
II Sections planes du cube

II 1 Le théorème d'incidence

Pour étudier les sections planes du cube, on utilise une propriété fondamentale :

Théorème d'incidence

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

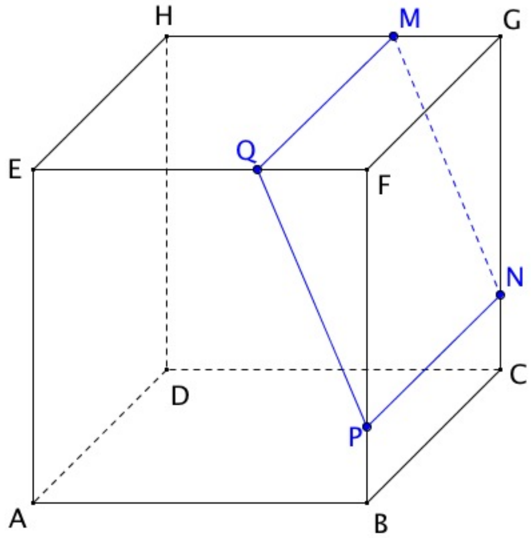


$P//P'$
Q coupe P et P' selon deux droites parallèles d et d'.

II 2 Exemples

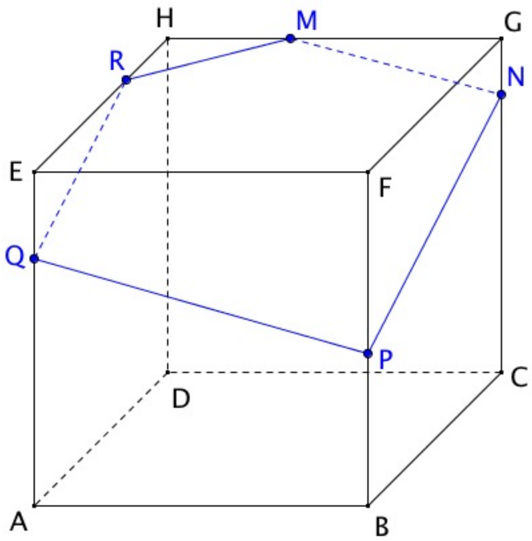
Soit ABCDEFGH un cube ; on recherche la section plane par le plan (MNP) dans les cas suivants :

II 2 a Exemple 1



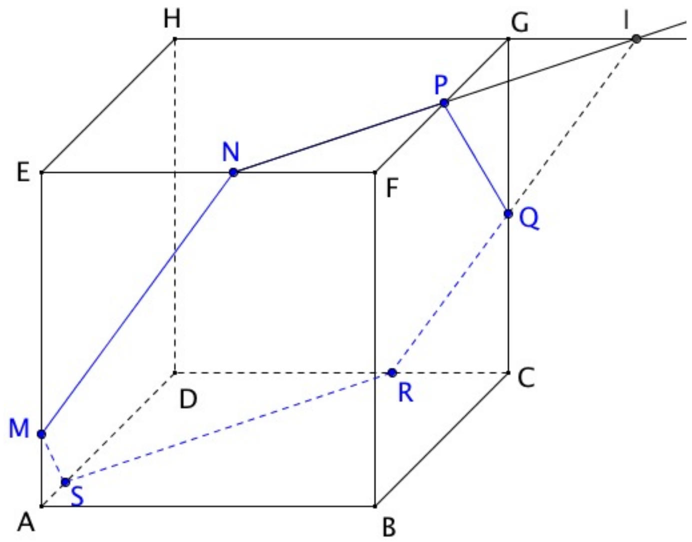
• $(HGC) \cap (MNP) = (MN)$.
• $(BCG) \cap (MNP) = (NP)$.
• Plan (ABE) :
$(ABE)//(DCG)$ donc (MNP) les coupe selon 2 droites parallèles (th. d'incidence) : (MN) et la droite parallèle à (MN) passant par P : (PQ), $Q \in (EF)$.
• $(EFG) \cap (MNP) = (MQ)$.
Finalement, la section est le trapèze $MNPQ$.

II 2 b Exemple 2



On procède de la même façon, plan par plan, en utilisant le théorème d'incidence quand nécessaire.
Finalement, la section est le pentagone MNPQR.

II 2 c Exemple 3

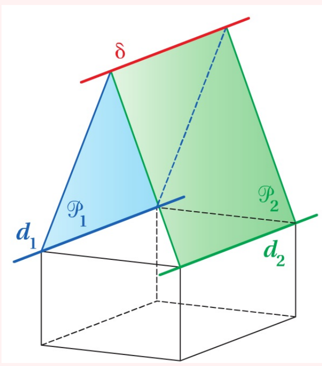


• $(ABE) \cap (MNP) = (MN)$ et $(EFG) \cap (MNP) = (NP)$.
• On ne peut pas continuer, on va donc utiliser le théorème d'incidence avec $(CDG)//(ABE)$, donc (MNP) coupe (CDG) selon une droite parallèle à (MN).
Il manque un point de cette droite : $(NP) \cap (GM)$ lui appartient.
Posons $I = (NP) \cap (GH)$. (MNP) coupe (CDG) selon la parallèle à (MN) passant par I, sécante de (CDG) à (CG) en Q et à (CD) en R : $(CDG) \cap (MNP) = (QR)$.
• $(BCG) \cap (MNP) = (PQ)$.
• $(ABC) \cap (MNP) = (RS)$, où S est l'intersection de (AD) et de la parallèle à (NP) menée par R ($(ABC)//(EFG)$).
Finalement, la section est l'hexagone MNPQRS.

II 3 Le théorème du toit

Théorème

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles, avec d_1 incluse dans un plan P_1 et d_2 incluse dans un plan P_2.
Si P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite δ, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles à δ.



Démonstration

La démonstration sera faite au chapitre G2.

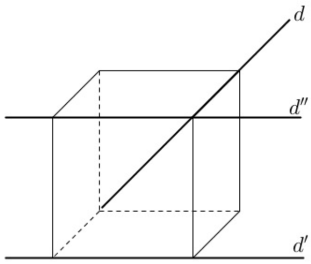
III Orthogonalité dans l'espace

III 1 Orthogonalité de deux droites

Définition

On dit que deux droites sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires (« se coupent à angle droit »).

Exemple :



d et d' sont orthogonales, car d et d'' sont perpendiculaires.

III 2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toutes les droites de P.

Propriété

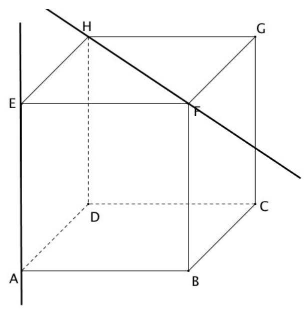
Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration

La démonstration sera faite au chapitre Géométrie-04, avec le produit scalaire dans l'espace.

Exemple :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

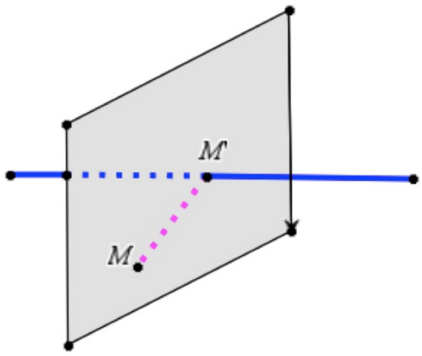


1. Démontrer que (AE) et (FH) sont orthogonales.
2. Soit M un point quelconque du segment $[EH]$ et N un point quelconque du segment $[HG]$. Démontrer que (AE) et (MN) sont orthogonales.

III 3 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Soit D une droite de l'espace. La projection orthogonale sur la droite D est l'application qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite D et du plan P perpendiculaire à D et passant par M.
M' est appelé le projeté orthogonal de M sur D.



III 4 Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Soit P un plan.
La projection orthogonale sur le plan P est l'application qui, à tout point M de l'espace associe le point M', intersection du plan P et de la droite perpendiculaire à P et passant par M.
M' est appelé le projeté orthogonal de M sur P.