INTÉGRATION

Analyse - Chapitre 9

Table des matières

I Définition de l'intégrale d'une fonction

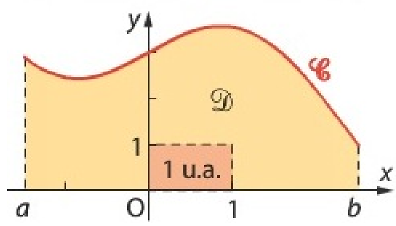
I 1 Cas d'une fonction continue positive sur $[a;b]$

I 1 a Aire sous la courbe

Définition

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$, avec a et b deux réels tels que $a<b$.
On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$ le nombre qui exprime l'aire, en unité d'aire (u.a.), du domaine D délimité par la courbe C_f de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \text{aire}(D)$.



Remarques :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit « somme de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$ » ou « intégrale de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$ ».
- On note indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$...

I 1 b Premiers calculs d'intégrales

faire une figure à chaque fois) :

- Calculer $I=\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{3}{2}\,\mathrm{d}x$ $\quad(=4\times\frac{3}{2}=6)$
- Calculer $J=\displaystyle\int_{1}^{3} t\,\mathrm{d}t$ $\quad(=4)$
- Calculer $K=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad(=\frac{\pi}{2})$

I 1 c Un exemple plus complexe

Comment calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$?

Partageons l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. Plus n sera grand, plus la précision sera bonne. Alors l'aire sous la courbe de la fonction exp entre 0 et 1, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, est encadrée par deux sommes de rectangles telles que : $m_1+m_2+...+m_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant M_1+M_2+...+M_n$.

On a $m_1=\frac{1}{n}$, $m_2=\frac{1}{n}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, $m_3=\frac{1}{n}\times\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$, ..., $m_n=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}$

Et $M_1=m_2$, $M_2=m_3$, ..., $M_{n-1}=m_n$ et $M_n=\frac{1}{n}\times\mathrm{e}^1$.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{n}\mathrm{e}^1$$

$$\frac{1}{n}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2+\ldots+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right)\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2+\ldots+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)$$

$$\frac{1}{n}\times\frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\times\frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1}{n}\times\frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\times\frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}}\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{N\to 0}\frac{e^N-1}{N-0}=\exp'(0)=1$, donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-1}=1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}}=\mathrm{e}-1$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}=1$ donc on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}}=\mathrm{e}-1$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1$. Mais $\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ne dépendant pas de n, alors on peut en conclure que $\boxed{\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1}$.

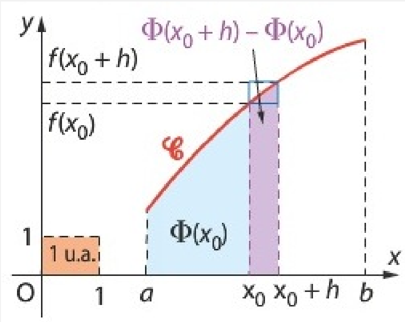
I 1 d Dérivabilité d'une fonction aire

Théorème

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$, avec a et b deux réels tels que $a<b$. Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f : $\forall x\in[a;b]$, $F'(x)=f(x)$.

Démonstration :

Démonstration dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$:
(Le résultat est admis dans le cas général)



(Remplacer Φ par F)

Soit $x_0 \in [a;b]$ et h un réel tel que $x_0 + h \in [a;b]$.

• **Si** $h > 0$ **:**
f est croissante donc $f(x_0) \leqslant f(x_0+h)$, et $F(x_0+h) - F(x_0)$ exprime l'aire sous la courbe de f sur $[x_0; x_0+h]$.
On encadre cette aire par celles de deux rectangles de même largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$:
$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$.
D'où $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$ (puisque $h > 0$ ici)

Or f est continue en x_0, donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$.
Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in [a;b]$ donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$.

• **Si** $h < 0$ **:**
A faire en exercice ! (peu de changement, uniquement dans l'encadrement, signe etc.)

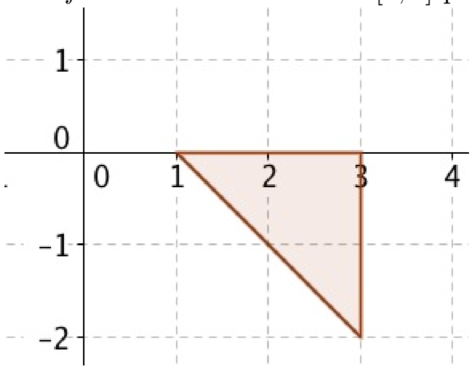
I 2 Cas d'une fonction continue négative sur $[a;b]$

Définition

Soit f une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$.
On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'opposée de l'aire délimitée par la courbe C_f de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
On dit qu'il s'agit de l'**aire algébrique** de ce domaine.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[1;3]$ par $f(x) = 1 - x$.



$f \leqslant 0$ sur $[1;3]$ donc $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

I 3 Cas d'une fonction changeant de signe sur $[a;b]$

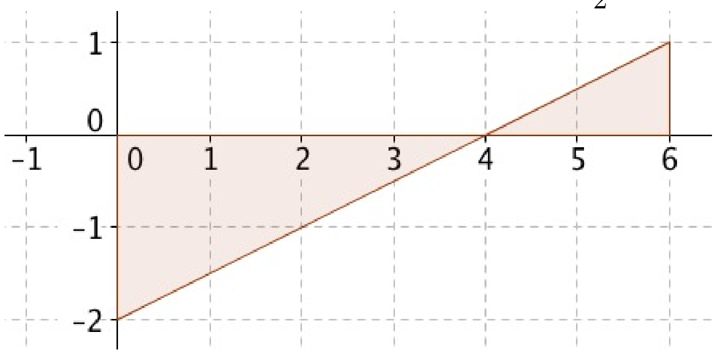
Définition

Soit f une fonction **continue, de signe quelconque** sur $[a;b]$, avec a et b deux réels.

On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la somme des aires algébriques des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0;6]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$.



$f \leqslant 0$ sur $[0;4]$ et $f \geqslant 0$ sur $[4;6]$ (on le prouve rapidement par une inéquation).

Donc $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{4\times 2}{2} + \frac{2\times 1}{2} = -4 + 1 = -3$.

Autre exemple : calculer $\displaystyle\int_{-4}^4 x^3\mathrm{d}x$

II Primitive d'une fonction continue

II 1 Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I tel que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemples :
- $x \mapsto \sin x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto 3x^2 - 2$, $x \mapsto 5 - 3x^2$ et $x \mapsto 3x^2 + 1$ sont des primitives de $x \mapsto 6x$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \dfrac{-5x+6}{x-1}$ sont des primitives de $x \mapsto -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1; +\infty[$.

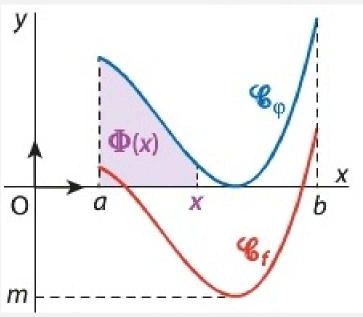
II 2 Théorème

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration :

Principe de la démonstration - EXIGIBLE BAC !!



On se place dans le cas où I est un intervalle fermé $[a; b]$.
On admet le résultat suivant : toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum et un maximum sur $[a; b]$.
Soit f une fonction continue sur I et m son minimum sur I. Alors pour tout $x \in I$, $f(x) - m \geqslant 0$.
Soit ϕ la fonction $x \mapsto f(x) - m$. ϕ est continue et positive sur I, donc il existe une fonction Φ définie sur I tel que $\forall x \in I$, $\Phi'(x) = \phi(x) = f(x) - m$.
Alors, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est dérivable sur I et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. Ainsi, F est une primitive de f sur I.

II 3 Propriété

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors deux primitives de f sur I ne diffèrent que d'une constante.
(Autrement dit, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que $F = G + k$.)

Démonstration :

Si f est continue sur I, alors elle admet (au moins) 2 primitives F et G telles que $F' = G' = f$.
Donc $(F - G)' = 0$ sur I, donc $F - G = k$, $k \in \mathbb{R}$ sur I.

III Calculs de primitives

III 1 Primitives des fonctions usuelles

On obtient le tableau suivant par « lecture inverse » du tableau des dérivées usuelles.

Fonction $f : x \mapsto ...$	**Une primitive** $F : x \mapsto ...$	**Sur l'intervalle** $I = ...$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

III 2 Primitives et opérations sur les fonctions

On peut déduire deux théorèmes, à partir des opérations sur les fonctions dérivables et de la définition d'une primitive :

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et admettant comme primitives respectives sur I les fonctions F et G.
Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et λ un réel.
Alors la fonction λF est une primitive de λf sur I.

Les primitives de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées.
Dans chaque cas, u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I.

Fonction f du type...	Une primitive F du type...	Conditions
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^n}$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$	Pour tout x de I, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	Pour tout x de I, $u(x) > 0$.
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout x de I, $u(x) > 0$.
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0,\ x \in J)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	Pour tout x de J, $ax+b \in I$ et U primitive de u sur I.

Exemples :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto -\sin x + 2\cos x$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
- $f : x \mapsto x^2(x^3-1)^5$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1; +\infty[$.
- $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$ sur $]2; +\infty[$.
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

Remarque :

Peut-on trouver facilement une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?

IV Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

On admet que le théorème vu en **I.1.d.** peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque :

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I.

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

Conséquence pour calculer une intégrale :

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit F une primitive de f sur I, et soit a et b deux réels quelconques de I.

On appelle **intégrale de la fonction f entre a et b** le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Démonstration :

f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I. On cherche à calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe une primitive G de f sur I telle que $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi, il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$.
Or $G(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $F(a) = G(a) + k$ d'où $k = F(a) - G(a) = F(a) - 0 = F(a)$.
Donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

Remarque :
On écrit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Conséquence :
- $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples :
- $\int_{-2}^5 3\,\mathrm{d}x = [3x]_{-2}^5 = 15 - (-6) = 21$.
- $\int_1^{-1} u^2\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.
- $\int_{-1}^0 e^t\,\mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}$.
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$.
- $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(-t)]_{-2}^{-1} = 0 - \ln 2 = -\ln 2$.
- $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_e^{e^3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

V Propriétés des intégrales

V 1 Relation de Chasles

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous réels a, b et c dans I, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I.

Alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| - 2$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f(x) = x - 2 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $f(x) = -x - 2 \Leftrightarrow x < 0$. Donc :

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (-x-2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{5} (x-2)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{0}^{5}$$

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = (0 - (-2+4)) - \left(\left(\frac{25}{2} - 10\right) - 0\right) = -2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

V 2 Linéarité

Propriété

Soit f et g deux fonctions continue sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b dans I, et pour tout réel λ, on a :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

Soit F et G deux fonctions primitives respectives de f et de g sur I :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I donc :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- λF est une primitive de λf sur I donc :

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple :

Soit $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $J+K$ et $J-K$.
2. En déduire J et K.

$$J+K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

$$J-K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ainsi, on résout le système $\begin{cases} J+K = \dfrac{\pi}{6} \\ J-K = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ 2K = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8} \\ K = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$

V 3 Intégrales et inégalités

Propriété (Positivité)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Démonstration :

f est positive sur $[a;b]$ donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ exprime l'aire (en u.a.) sous la courbe de f. D'où le résultat.

Propriété (ordre)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

$f \leqslant g$ donc $g - f \geqslant 0$ sur $[a;b]$; ainsi, d'après la propriété de positivité, $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Ainsi, par linéarité de l'intégration, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarques :

- Les réciproques de ces deux propriétés sont fausses.
- Par extension, le résultat reste valable avec trois fonctions f, g et h continues sur I :

  Si $\forall x \in [a\,;b]$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple :

Soit $J = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\forall x \in [0;2]$, $x \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant x+1$.
2. En déduire un encadrement de J.

Correction :

1. $\forall x \in [0;2]$, $x^2 \leqslant 1+x^2 \leqslant 1+2x+x^2$.
   Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;2]$ donc $|x| \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant |1+x|$.
   Donc $\forall x \in [0;2]$, $x \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant 1+x$.

2. On intègre les inégalités obtenues à la question précédente sur $[0;2]$:
   $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x \leqslant J \leqslant \int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x$
   Donc $\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \leqslant J \leqslant \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2$.
   Donc $2 \leqslant J \leqslant 4$.

VI Valeur moyenne d'une fonction continue

VI 1 Valeur moyenne

Définition

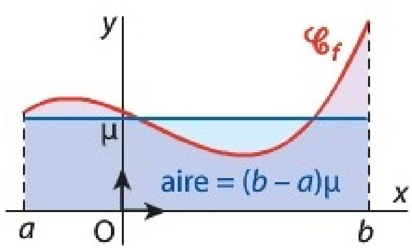
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, $a<b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre noté μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

La valeur moyenne μ est telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mu$.

Ainsi, lorsque f est positive sur $[a;b]$, le nombre μ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a;b]$ et ayant la même aire que le domaine D située sous la courbe C_f.



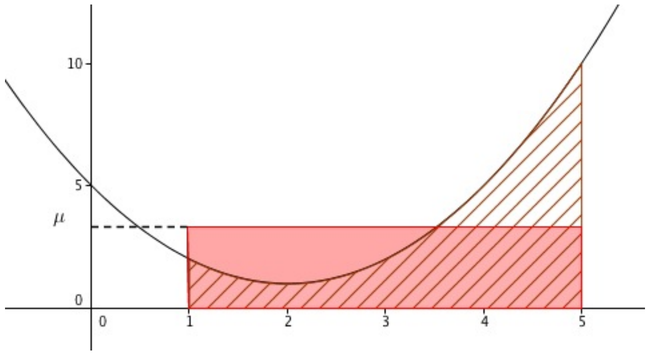
Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

1. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;5]$.
2. Tracer C_f sur $[1;5]$ et interpréter graphiquement.

Correction :

1. $\mu = \dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 (x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^5$.
   Donc $\mu = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{10}{3}$. Donc $\mu = \dfrac{10}{3}$.
2. $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ donc C_f est une parabole convexe de sommet $(2;1)$:



L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle rouge.

VI 2 Inégalité de la moyenne

Théorème (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I tels que $a < b$.
Soit M et m deux réels tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors :

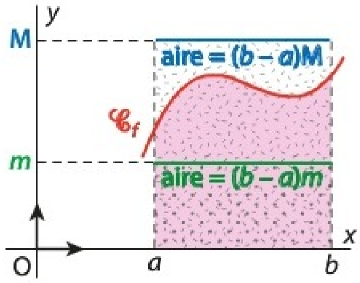
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Démonstration :

$\forall x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont telles que : $\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}x = [mx]_a^b = m(b-a)$ et $\displaystyle\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$.
Or $a < b$ donc d'après la propriété d'ordre vu précédemment, on a :
$\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$, soit $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :
Si f est bornée sur $[a;b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe C_f sur $[a;b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a;b]$ et de hauteurs respectives m et M.



Remarque - encadrement de la valeur moyenne :
En divisant chaque membre de $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$ par le nombre strictement positif $b-a$, on obtient $m \leqslant \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$, c'est-à-dire un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ sur $]1;+\infty[$.
Encadrer à $0,01$ près la valeur moyenne de f sur $[2;4]$.

Correction :
f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et $f'(x) = ... = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$, donc $f' < 0$ sur $]1\,;\mathrm{e}[$ et $f' > 0$ sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$.
Donc f est strictement décroissante sur $]1\,;\mathrm{e}]$ et strictement croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

- f strictement décroissante sur $[2\,;e]$ donc $\forall x \in [2\,;\mathrm{e}]$, $f(\mathrm{e}) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$, soit $2 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{\ln 2}$.

- f strictement croissante sur $[\mathrm{e}\,;4]$ donc $\forall x \in [\mathrm{e}\,;4]$, $f(\mathrm{e}) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$, soit $e \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{\ln 2}$.

Finalement : $\forall x \in [2\,;4]$, $e \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{\ln 2}$.

On a donc : $e \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{2}{\ln 2}$

D'où $2,71 \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2,89$.