FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Analyse - Chapitre 8

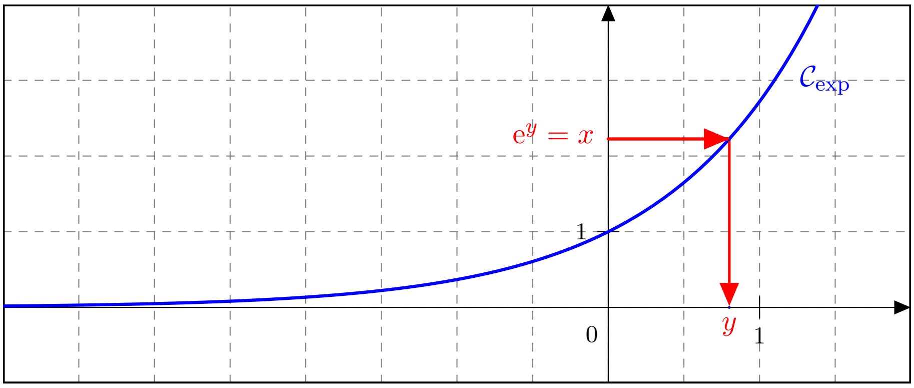
Table des matières

I La fonction logarithme népérien

I 1 Théorème et définition

Théorème

Pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.



Démonstration :

- La fonction exponentielle est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du TVI, pour tout $x \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

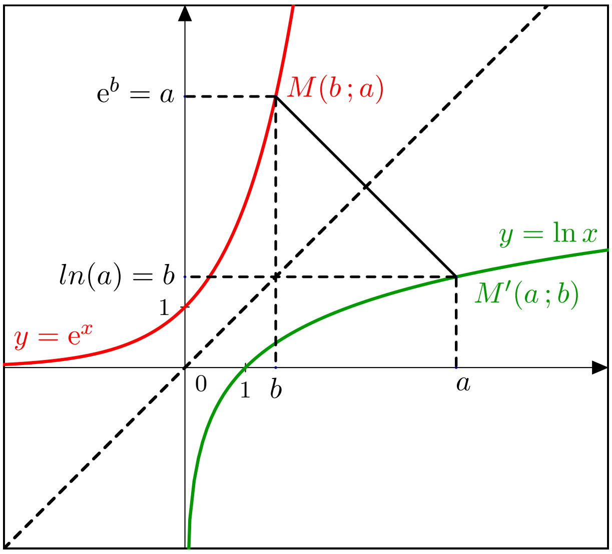
Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique réel donc l'exponentielle est x.
On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+^*$.

I 2 Conséquences immédiates

Propriétés

- $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. En particulier, $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$.
- Les fonctions exp et ln étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



I 3 La relation fonctionnelle

I 3 a La relation

Propriété

Soient x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Démonstration :

Soient x et y deux réels strictement positifs. Posons $a = \ln x$ et $b = \ln y$. Alors $x = e^a$ et $y = e^b$. D'après la relation fonctionnelle de exp, on a donc : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, donc $e^{a+b} = xy$, donc $a+b = \ln(xy)$, c'est-à-dire $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Remarque :
Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\ln(xy)$ existe, mais $\ln x$ et $\ln y$ n'existent pas.
$\forall x < 0$ et $\forall y < 0$, $\ln(xy) = \ln(-x) + \ln(-y)$.

Exemple :

$\ln 12 = \ln(3 \times 2 \times 2) = \ln 3 + 2 \ln 2$.

I 3 b Conséquences

Propriété

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
2. $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$.
3. Pour tous nombres strictement positifs a_1, a_2, ..., a_n : $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$.
5. $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration (à donner en exercices) :

1. $\ln a = \ln\left(\frac{a}{b}\times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b$, d'où $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
2. En prenant $a = 1$, on a alors $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.
3. Démonstration par récurrence (exercice à faire à la maison).
4. Pour $n \geqslant 2$, cela résulte de la proposition précédente en posant $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$.
   Pour $n = 1$ et $n = 0$, cela résulte de $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
   Pour $n < 0$, $\ln a^n = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n\ln a)) = n\ln a$ (car $-n > 0$).
5. $a = \sqrt{a}\times\sqrt{a}$ donc $\ln a = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a} = 2\ln\sqrt{a}$ d'où $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Exemple :

Simplifier $A = \ln(4^{-3}) + 5\ln 2$ et $B = \ln\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$. (*Correction :* $A = -\ln 2$ et $B = \frac{1}{2}\ln 5$)

II Étude de la fonction logarithme népérien

II 1 Dérivée

Propriété

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration :

$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall h \neq 0$ tq $x + h > 0$, étudions $\tau(h) = \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$.

Posons $u = \ln(x+h)$ et $v = \ln(x)$. Alors $x + h = e^u$ et $x = e^v$. Ainsi, $\tau(h) = \frac{u-v}{e^u - e^v}$.

Notons alors $k = u - v$, d'où $u = v + k$. Ainsi, $\tau(h) = \frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{\frac{e^{v+k} - e^v}{k}}$.

Or la fonction exp est dérivable en v avec pour nombre dérivée e^v, donc $\lim\limits_{k\to 0}\frac{e^{v+k} - e^v}{k} = e^v = x$ d'où $\lim\limits_{k\to 0}\frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{x}$.

De plus, $\lim\limits_{h\to 0} k = \lim\limits_{h\to 0}(u - v) = \lim\limits_{h\to 0}[\ln(x+h) - \ln x] = \ln x - \ln x = 0$

Finalement :

$\lim\limits_{h\to 0} k = 0$ et $\lim\limits_{k\to 0}\frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{x}$ donc par limite de fonctions composées, $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h) = \frac{1}{x}$.

Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration plus graphique :

• Montrons que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$:
Les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Or la courbe de la fonction exp admet en chacun de ses points une tangente non horizontale (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) \neq 0$), donc la courbe de la fonction ln admet en chacun de ses points une tangente non verticale. Donc ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

• Montrons que $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$:
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \ln' x \times e^{\ln x} = x \ln' x$.
Or $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$ sur $]0;+\infty[$.
Donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $x \ln' x = 1$ d'où $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

II 2 Sens de variation et signe

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriété

La fonction ln est strictement négative sur $]0;1[$, nulle en 1, et strictement positive sur $]1;+\infty[$.

Démonstration :

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln 1 = 0$ d'où le résultat.

II 3 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété (conséquence directe de la stricte monotonie de ln)

Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \qquad \text{et} \qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

Exemples :

• Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $\ln x = -5$.
• Résoudre l'inéquation $\ln(1 + x) \leqslant 100$ après avoir précisé sur quel intervalle cette inéquation a un sens.
• De même avec l'inéquation $\ln(x^2 - 4) \leqslant \ln x$.
• De même avec l'équation $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$.

II 4 Comportement asymptotique

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Démonstration :

• **Limite en $+\infty$:**
Soit $I =]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc si $x > e^A$, alors $\ln x > A$: pour x assez grand, $\ln x \in I$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

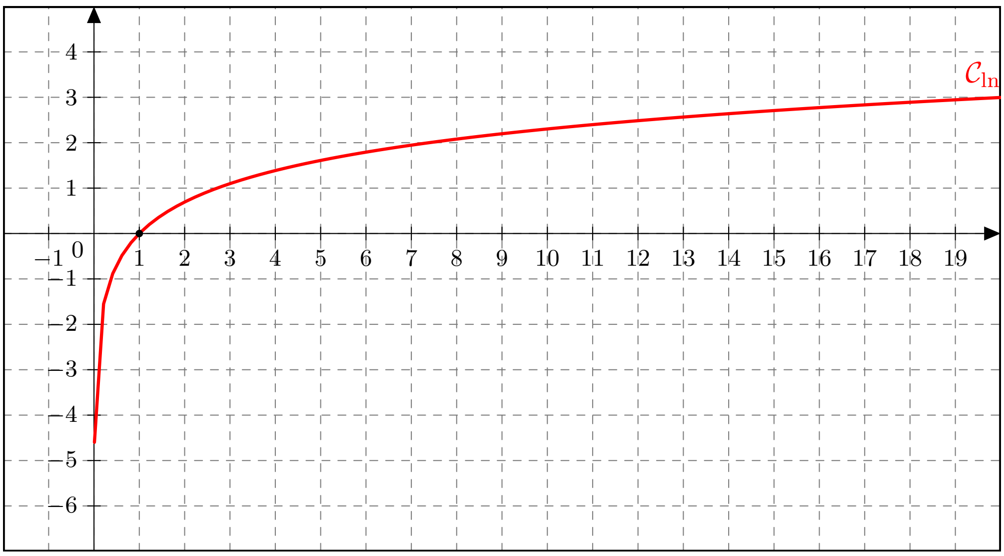
• **Limite en 0 :**
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$, donc par limite de fonctions composées, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln \dfrac{1}{x} = +\infty$.
Or $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

II 5 Résumé

Tableau de variation détaillé :

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln)'(x)$		$+$		
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Courbe représentative :



III Compléments

III 1 Des limites importantes

Propriété

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Démonstration :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}$ (car $\ln 1 = 0$).
On reconnaît la limite quand x tend vers 0 du taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+x$.
Or la fonction ln est dérivable en 1 donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

- Posons, pour $x>0$, $X = \ln x$, soit $x = e^X$. Alors $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$.
Or $\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.
Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} X = +\infty$, alors par limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

- Avec le même changement de variable, on a $x\ln x = Xe^X$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} (Xe^X) = 0$ donc par limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - x$. (*Factoriser par x*)
- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}\ln x$. ($\forall x>0$, $\dfrac{x}{x^2+1}\ln x = \dfrac{x^2}{x^2+1}\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\dfrac{\ln x}{x}$).

Exercice pour retrouver le résultat de $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$:

1. Démontrer que pour tout $x>1$, $\ln x < \sqrt{x}$ (*Étude de fonction*).
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]1\,;+\infty[$ puis conclure.

III 2 Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration :

La démonstration est immédiate à l'aide de la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$:
$\forall x \in I,\ f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

III 3 Exercices de synthèse

- Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$.
- Étudier la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2$.

III 4 Fonction logarithme décimal

Définition

La fonction **logarithme décimal**, notée log, est définie sur $]0;+\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.