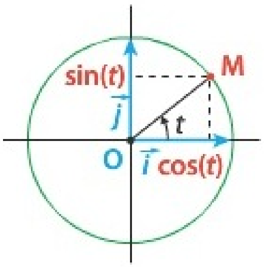
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Analyse - Chapitre 7

Table des matières

I Fonction sinus et fonction cosinus

I 1 Définition



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
A tout réel t, on associe un unique point M du cercle trigonométrique de centre O tel que $t = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ (mesure de l'angle orienté en radians).
Le point M a pour coordonnées $(\cos t\,;\sin t)$.

Remarque : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$.

Définition

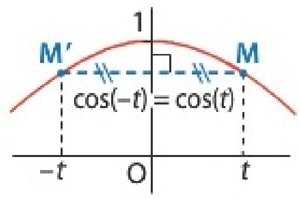
• La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'abscisse $\cos x$ du point M est appelée la fonction cosinus et est notée cos.
• La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'ordonnée $\sin x$ du point M est appelée la fonction sinus et est notée sin.

I 2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

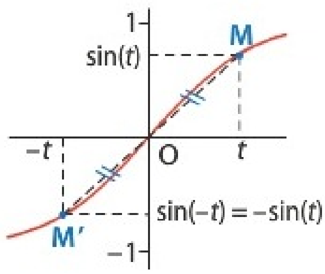
Propriété (admise)

• Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$: on dit que la fonction cosinus est **paire** sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin x$: on dit que la fonction sinus est **impaire** sur $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique :
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



• Les points $M(x; \cos x)$ et $M'(-x; \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{\jmath})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc **symétrique par rapport à l'axe** $(O; \vec{\jmath})$.

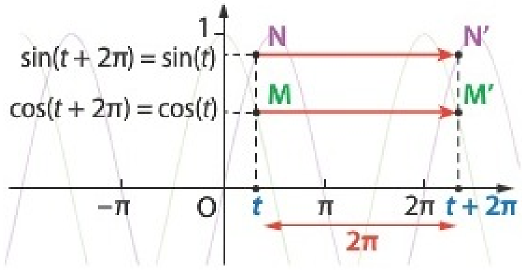


• Les points $M(x; \sin x)$ et $M'(-x; \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est donc **symétrique par rapport à l'origine** O **du repère**.

Propriété (admise)

Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période** 2π (ou « 2π-périodiques »).

Conséquences graphiques :



Les points $M(x;\cos x)$ et $M'(x+2\pi;\cos(x+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'}=2\pi\vec{\imath}$. De même, les points $N(x;\sin x)$ et $N'(x+2\pi;\sin(x+2\pi)$ sont tels que $\overrightarrow{NN'}=2\pi\vec{\imath}$. Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π. Mais de plus, les fonctions sin et cos étant respectivement impaires et paires sur $\mathbb{R}$, par symétrie, on peut restreindre leur étude sur l'intervalle $]0\,;\pi]$. Finalement, on pourra procéder ainsi :

1. On étudie le sens de variations des fonctions sin et cos sur $]0\,;\pi]$.
2. On en déduit le sens de variations sur $]-\pi;\pi]$ par symétrie (axiale pour cos et centrale pour sin).
3. On obtient ensuite chaque courbe sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{\imath}$, pour $k\in\mathbb{Z}$.

II Étude des fonctions sinus et cosinus en 0

II 1 Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en 0, et on a : $\sin' 0 = 1$ et $\cos' 0 = 0$.

Démonstration à l'aide d'une activité géométrique :

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère un réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, le point M du cercle trigonométrique associé à x, et le point T, intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle en I.

1. (a) Montrer que $IT=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
   (b) En rangeant dans l'ordre croissant les aires des triangles OIM, OIT et celle du secteur de disque OIM, montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\frac{\pi}{2}[$,
   $$\sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$$
   (c) En déduire que, pour tout x de $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,
   $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$
   On admet de même que cet encadrement est également vrai lorsque $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$.
   (d) En déduire, en utilisant la définition, que la fonction sinus est dérivable en zéro et que $\sin' 0 = 1$.
2. (a) Montrer que pour tout réel h non nul de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :
   $$\frac{\cos h-1}{h}=\frac{\sin h}{h}\times\frac{-\sin h}{\cos h+1}$$
   (b) En déduire le nombre dérivé en zéro de la fonction cosinus.

II 2 Deux limites particulières à connaitre

Propriété

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Démonstration :

Les démonstrations ont été faites dans l'activité précédente.

III Étude de la fonction sinus

III 1 Dérivée

Propriété

La fonction sinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.

Démonstration :

Soit x un nombre réel quelconque et h un réel non nul.

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

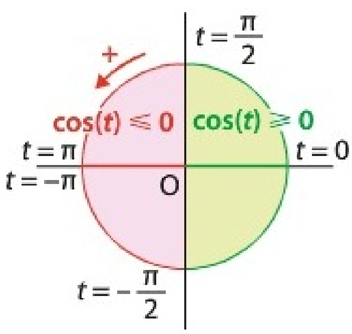
Or $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ (d'après le cours).

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \in \mathbb{R}$.

Ce qui prouve que la fonction sinus est dérivable en tout réel x et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \cos x$.

III 2 Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction sinus sur l'intervalle $]0\,;\pi[$:



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

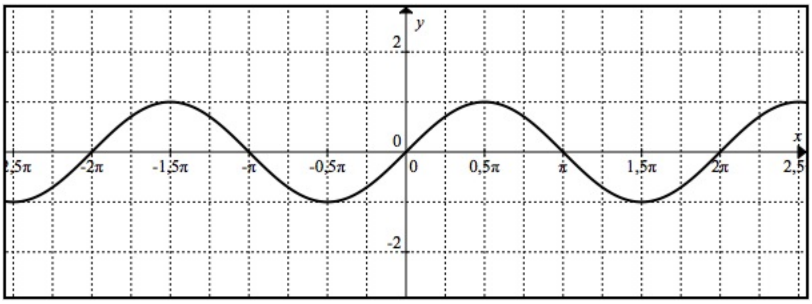
On en déduit alors le sens de variations de la fonction sinus sur $]-\pi\,;\pi]$ par symétrie centrale par rapport à O :

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

III 3 Courbe représentative

On rappelle quelques valeurs connues de la fonction sinus :

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$



IV Étude de la fonction cosinus

IV 1 Dérivée

Propriété

La fonction cosinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

Démonstration :

Soit x un nombre réel quelconque et h un réel non nul.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}.$$

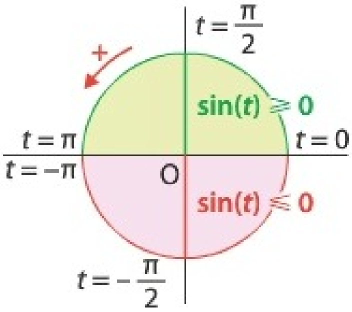
Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ (d'après le cours).

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \in \mathbb{R}$.

Ce qui prouve que la fonction cosinus est dérivable en tout réel x et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\sin x$.

IV 2 Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction cosinus sur l'intervalle $]0\,;\pi[$:



x	0		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	-1

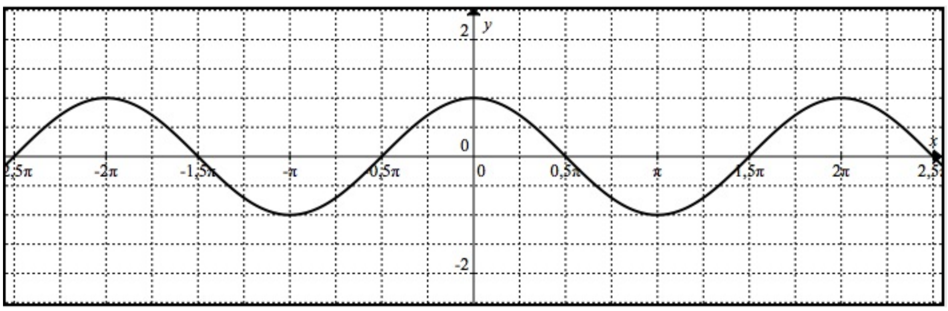
On en déduit alors le sens de variations de la fonction cosinus sur $]-\pi\,;\pi]$ par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées :

x	$-\pi$		0		π
$\cos$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

IV 3 Courbe représentative

On rappelle quelques valeurs connues de la fonction cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



V Limites

Propriété

Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Démonstration :

• Montrons que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite infinie :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc si ces fonctions admettent une limite l, alors $-1 \leqslant l \leqslant 1$. Donc $l \neq -\infty$ et $l \neq +\infty$.

• Montrons par l'absurde que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite finie :
Supposons que la fonction sinus admette, quand x tend vers $+\infty$, une limite finie notée l, compris entre -1 et 1 (d'après ci-dessus).
Alors pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel M tel que $\forall x \geqslant M$, $\sin x \in I$.
Prenons $I =]l - 0,1\,;l + 0,1[$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geqslant M$, $l - 0,1 < \sin x < l + 0,1$.
Or l'intervalle $[M\,;+\infty[$ contient une infinité de réels sous la forme $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ dont le sinus vaut 1 et une infinité de réels sous la forme $-\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ dont le sinus vaut -1. Ainsi, l'intervalle I devrait contenir à la fois 1 et -1, ce qui est impossible car la longueur de l'intervalle est de $l + 0,1 - (l - 0,1) = 0,2$.
Donc la fonction sinus n'a pas de limite finie.
(idem pour la fonction cosinus)

Remarque :
En revanche, une fonction « contenant » un sinus ou un cosinus peut admettre une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemples :

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (*théorème des gendarmes*).