Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en 0, et on a : $\sin' 0 = 1$ et $\cos' 0 = 0$.

Démonstration à l'aide d'une activité géométrique :

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère un réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, le point M du cercle trigonométrique associé à x, et le point T, intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle en I.

1. (a) Montrer que $IT = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

   (b) En rangeant dans l'ordre croissant les aires des triangles OIM, OIT et celle du secteur de disque OIM, montrer que, pour tout réel x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,

   $$\sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$$

   (c) En déduire que, pour tout x de $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,

   $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

   On admet de même que cet encadrement est également vrai lorsque $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$.

   (d) En déduire, en utilisant la définition, que la fonction sinus est dérivable en zéro et que $\sin' 0 = 1$.

2. (a) Montrer que pour tout réel h non nul de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

   $$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\sin h}{h} \times \frac{-\sin h}{\cos h + 1}$$

   (b) En déduire le nombre dérivé en zéro de la fonction cosinus.