COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

Analyse - Chapitre 6

Table des matières

I Rappels

I 1 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Le nombre dérivé d'une fonction f en un point d'abscisse a est la limite, si elle existe et est finie, du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On le note $f'(a)$.

Interprétation graphique : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f en $A(a; f(a))$.

I 2 Tangente

Propriété

Si f est une fonction dérivable en un réel a, alors C_f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

I 3 Fonction dérivée

Définition

On dit que f est une fonction dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout $a \in I$.
On appelle alors fonction dérivée de la fonction f, la fonction notée f' définie sur I qui à tout réel a associe le nombre dérivé $f'(a)$.

I 4 Variations de fonctions

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive et ne s'annule qu'en des nombres isolés, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative et ne s'annule qu'en des nombres isolés, alors f est strictement décroissante sur I.
Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Exemple :

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)$ ne s'annule qu'en 0.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

I 5 Extremum

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.
Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

Remarques :
- Le fait que $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas pour pour dire que $f(x_0)$ est un extremum. (ex : $x \mapsto x^3$ en 0).
- Si $f' < 0$ avant x_0 et $f' > 0$ après, alors $f(x_0)$ est un minimum.
- Si $f' > 0$ avant x_0 et $f' < 0$ après, alors $f(x_0)$ est un maximum.

I 6 Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$	Conditions
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a, b réels
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

I 7 Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

Propriétés

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $(u+\mathrm{v})$, ku (k réel) et $(u\mathrm{v})$ sont dérivables sur I et $(u+\mathrm{v})' = u' + \mathrm{v}'$, $(ku)' = ku'$ et $(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}'$.

- Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{\mathrm{v}}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{\mathrm{v}}\right)' = \dfrac{u'\mathrm{v} - u\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}$, et ainsi $\left(\dfrac{1}{\mathrm{v}}\right)' = -\dfrac{\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}$.

II Calculs de dérivées de fonctions composées

II 1 Fonctions du type $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.
Alors $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Démonstration :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I et v : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

Pour tout réel h non nul tel que $x+h \in I$, $\dfrac{\mathrm{v}(x+h)-\mathrm{v}(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}$.

$\dfrac{\mathrm{v}(x+h)-\mathrm{v}(x)}{h} = \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}$.

Or u est dérivable sur I donc en x, donc $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ a pour limite $u'(x) \in \mathbb{R}$ quand h tend vers 0, et $\dfrac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}$ a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \in \mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{\mathrm{v}(x+h)-\mathrm{v}(x)}{h}$ a pour limite $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \in \mathbb{R}$.

Conclusion : v est dérivable en x et $\mathrm{v}'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Exemple :

Soit f la fonction définie par $x \mapsto \sqrt{x^2-2}$.
Déterminer la fonction dérivée de f et en déduire les variations de f.

Remarque sur la dérivabilité en un réel :
Rappeler que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 (Refaire la démo).

Exercice important :

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. A l'aide du théorème ci-dessous, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et sa dérivée.
3. Démontrer que f n'est pas dérivable en 1 (*Attention, le h doit ici être strictement négatif*).

II 2 Fonctions du type $x \mapsto (u(x))^n$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est :
- dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de dérivée $x \mapsto nu'(x)u(x)^{n-1}$.
- dérivable en tout réel de I où $u(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, de dérivée $x \mapsto nu'(x)u(x)^{n-1}$

Démonstration par récurrence

A faire en exercice pour le cas $n \in \mathbb{N}$. On admettra le cas où $n \in \mathbb{Z}^*$.

Exemples :

Déterminer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto (x^2 + 3x - 1)^4$ et $g : x \mapsto (x^2 + 3x - 1)^{-4}$.
(*Attention pour g, penser à déterminer les valeurs de x telles que $g(x) \neq 0$ en calculant $\Delta = 13$.*)

II 3 Fonctions du type $x \mapsto f(ax + b)$

Théorème (démo faite au chapitre 1)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a et b deux réels.
Alors la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto af'(ax + b)$.

Exemples :

Déterminer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x + 1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{1 - x}$.

II 4 Fonctions du type $x \mapsto \exp(u(x))$

Théorème (admis)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto u'(x) \times \exp(u(x))$.
On le note : $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto e^{x^2+\frac{1}{x}}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer la dérivée de f.

II 5 Fonctions du type $x \mapsto f(u(x))$

Les cas particuliers précédents mettent en évidence une expression pour la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$ que l'on admettra :

Théorème (admis)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto u'(x)f'(u(x))$.