CONTINUITÉ ET TVI

Analyse - Chapitre 5

Table des matières

I Continuité d'une fonction

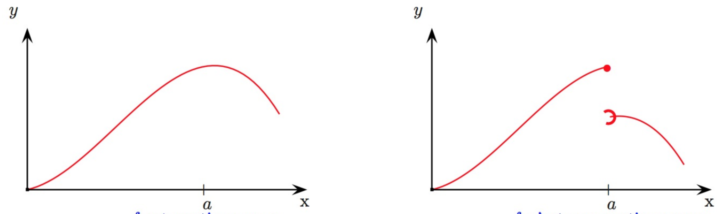
I 1 Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
• On dit que f est continue en a si et seulement si f a une limite finie en a telle que

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = f(a)$$

• On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout réel de I.



f est continue en a — f n'est pas continue en a

Remarques :
• Les fonctions usuelles sont continues sur les intervalles où elles sont définies. (admis)
• Dans un tableau de variation, on admet que les flèches obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de la fonction sur l'intervalle considéré.

I 2 Propriété

Propriété

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Démonstration :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit a un réel de I.
f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un réel. Notons ℓ ce réel.
Soit g la fonction définie sur $I-\{a\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
On a donc pour tout réel x de I, $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$.
Étudions $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:
$\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to a}(x-a)g(x) = 0$, et par somme, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a.
Or ceci est valable pour tout réel a de I, donc f est bien continue sur I.

Remarque importante :
La réciproque de cette propriété est fausse ! (Exemple : la fonction $x \mapsto |x|$)

Exemple 1 :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Corrigé : f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
Il reste à étudier la continuité de f en zéro :
Or $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ donc f est continue en 0.
Conclusion : f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple 2 :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$ donc f est continue sur ces intervalles.
Il reste à étudier la continuité de f en zéro :
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} -x = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0$ et $|0| = 0$ donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

II le Théorème des Valeurs Intermédiaires

II 1 Notion d'intervalle image

Définition

On appelle **image d'un intervalle** I par une fonction f l'ensemble des réels $f(x)$ quand x décrit I.
Il est noté $f(I) = \{f(x)\,,\, x \in I\}$.

Propriété (admise)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
- Si f est strictement croissante sur I, alors $f(I)$ est un intervalle et $f(I) = [f(a)\,;f(b)]$.
- Si f est strictement décroissante sur I, alors $f(I)$ est un intervalle et $f(I) = [f(b)\,;f(a)]$.

Exemple :

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

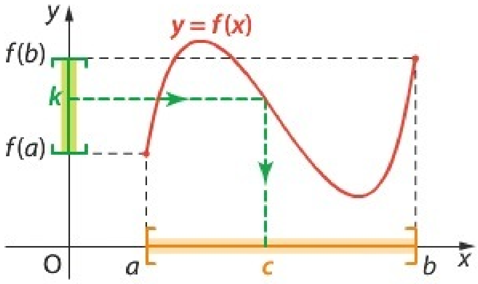
On pose $I = [2\,;5]$, $J = [-3\,;-1]$, $K = [2\,;+\infty[$ et $M = [-2\,;4]$.

Déterminer $f(I)$, $f(J)$, $f(K)$, et $f(M)$.

II 2 Le théorème

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, avec a et b des réels.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.



Exemple 1 :

Montrer que l'équation $x^5 + 2x - 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto x^5 + 2x - 1$.
f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
Or $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ et 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$, et donc dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2 :

Montrer que l'équation $\cos x = x$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto \cos x - x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
Or $f(0) = \cos 0 = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, et 0 est compris entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et donc dans $\mathbb{R}$.

II 3 Le corollaire

Corollaire (admis)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il **existe un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemples :

1. Montrer que l'équation $\cos x = \sqrt{2}x$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$.
2. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$?

Correction :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x - \sqrt{2}x$.
   • $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 - \sqrt{2}x \leqslant f(x) \leqslant 1 - \sqrt{2}x$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} -1 - \sqrt{2}x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \sqrt{2}x = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   • $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x - \sqrt{2}$.
   Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\sin x \leqslant 1$, donc $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$ donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'équation $\cos x = \sqrt{2}x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. *Faire une étude complète de* $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6$, *on obtient le tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	$+\infty$