LIMITES DE FONCTIONS

Analyse - Chapitre 4

Table des matières

I Limite d'une fonction à l'infini

I 1 Limite finie à l'infini

I 1 a Définition

Définition

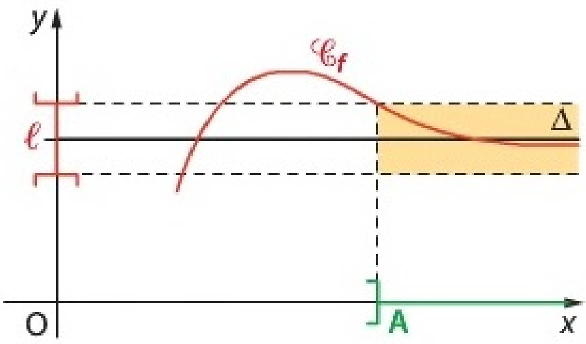
• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]A\,;+\infty[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]-\infty\,;A[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit.
On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Remarque :
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\forall\epsilon \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > A$, $f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\forall\epsilon \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x < A$, $f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$.

I 1 b Interprétation graphique et asymptote horizontale

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant l, et aussi petit soit-il, il existe un nombre A tel que la courbe C_f restreinte à l'intervalle $]A; +\infty[$ soit située dans la partie colorée ci-dessous :



Définition

Soit f une fonction et l un réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

(*Même définition en* $-\infty$)

Remarque :
Dans ce cas, la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $f(x) - l$.

Dans la suite du chapitre, on admettra que les fonctions utilisées dans les définitions et propriétés sont définies au moins sur un intervalle en adéquation avec la limite étudiée.

I 1 c Fonctions de référence

Propriété

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

Démonstration pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$:

Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Posons alors $I =]\lambda ; \mu[$ avec $\lambda < 0$ et $\mu > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} \in]\lambda;\mu[&\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{x^2} < \mu \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < \mu \text{ (car } \lambda < 0) \\
&\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\mu} \text{ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.) \\
&\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ ou } x > \frac{1}{\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

Donc pour x assez grand mais aussi pour x assez petit, I contient tous les $\dfrac{1}{x^2}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

I 2 Limite infinie à l'infini

I 2 a Définition

Définition

Soit f une fonction.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

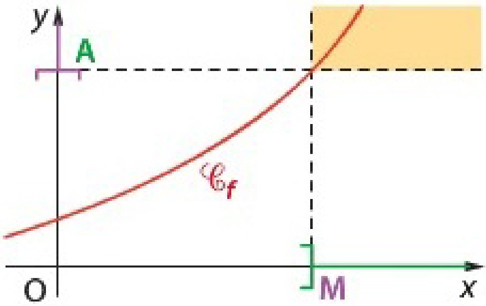
- On définit de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > M$, $f(x) > A$.

I 2 b Interprétation graphique

La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]M; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessous :



Exemple :

Démontrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - x^2 = -\infty$.

(Intervalle ouvert $]-\infty\,;A[$, $2x-x^2 < A \Leftrightarrow 2x - x^2 - A < 0$, et $2x-x^2-A$ est un polynôme soit négatif sur $\mathbb{R}$ (si $\Delta \leqslant 0$), soit négatif à gauche de sa plus petite racine, et donc bien pour « x assez petit », d'où le résultat).

I 2 c Fonctions de référence

Propriété

- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n impair) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n pair), $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Démonstration pour $x \mapsto x^2$ en $-\infty$:

Soit $I =]A\,;+\infty[$ avec A un réel strictement positif.
$x^2 > A \Leftrightarrow |x| > \sqrt{A}$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)
$\Leftrightarrow x > \sqrt{A}$ ou $x < -\sqrt{A}$.
Donc pour $x < -\sqrt{A}$, $x^2 \in I$: I contient tous les x^2 pour x assez petit, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

II Limite infinie en un réel

II 1 Définition

Définition

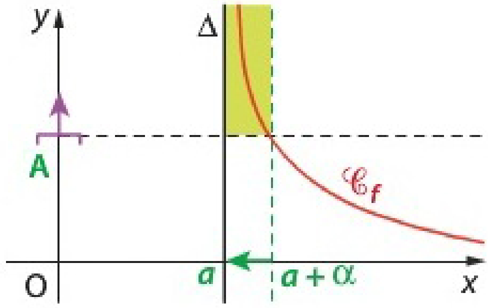
Soient f une fonction et a un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

On définit de même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Remarque si f est restreinte à l'intervalle $]l\,;+\infty[$:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in]l; l+\epsilon[$, $f(x) > A$.

II 2 Interprétation graphique et asymptote verticale

La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]l\,;l+\epsilon[$ est dans la partie colorée ci-dessous :



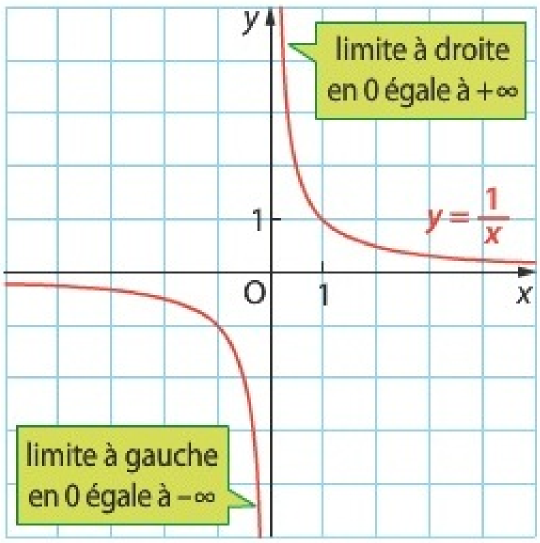
Définition

Soient f une fonction et a un réel.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Remarque :
Ce résultat reste valable si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=-\infty$, ou si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=+\infty$.

II 3 Limite à gauche, limite à droite

Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.



On remarque qu'on ne peut pas conclure directement sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 sans distinguer deux cas : x positif ou x négatif.

Cas où $x>0$:
Quel que soit le nombre $A>0$, $\dfrac{1}{x}>A \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{A}$ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$).
Autrement dit, quel que soit $A>0$, si $x<\dfrac{1}{A}$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient les nombres $f(x)$.

On dit que **la limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Cas où $x < 0$:
On prouve de manière analogue que lorsque x tend vers 0 en prenant des valeurs strictement inférieures à 0, alors $\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.
On dit que **la limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

II 4 Fonctions de référence

Définition

• Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite $+\infty$ en 0.

• Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (« à gauche ») et $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures (« à droite »)

Faire écrire ces résultats avec la notation lim.

Démonstration pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en 0 :

Soit $I =]A;+\infty[$ avec A un réel.
Si $A \leqslant 0$, alors le résultat est immédiat car pour tout réel x non nul, $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.
Supposons maintenant que A est strictement positif.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} \in I &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > A \\
&\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A} \text{ (la fonction inverse étant strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.\text{)} \\
&\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ (la fonction racine carrée étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{A}} < x < \frac{1}{\sqrt{A}}
\end{aligned}$$

Donc pour x assez proche de 0, $\dfrac{1}{x^2} \in I$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

III Opérations sur les limites

III 1 Somme, produit, quotient

Tableau des règles opératoires

Les tableaux du chapitre « *Limites de suites* » sont à reprendre, en remplaçant les suites u et v par les fonctions f et g définies au voisinage d'un réel a ou de $+\infty$ ou $-\infty$.

III 2 Exemple général

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à C_f.
3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f ainsi que ses asymptotes.

III 3 Quelques calculs de limites

Déterminer les limites suivantes et en donner une interprétation graphique :

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x}+2\right)(x^2-1)$?
2. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x+2}$?
3. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2-4}$?
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$?

III 4 Limite d'une fonction composée

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telle que, pour tout $x \in J$, $g(x) \in I$.
On appelle fonction composée $f \circ g$ la fonction définie sur J telle que pour tout x de J, on a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Théorème

On reprend les notations de la définition précédente.
Soient a, b et L des réels ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = b$ et $\displaystyle\lim_{x\to b} f(x) = L$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = L$

Exemple 1 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$?
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-3x}$?

Exemple 2 :

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

IV Limites et comparaison

IV 1 Théorème de comparaison

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec A un réel.
• Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
• Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarques :
• Ce théorème reste valable en $-\infty$ ou en un réel a.
• Ce théorème reste valable également si l'inégalité n'est vérifié qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

Démonstration :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ $(M \in \mathbb{R})$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand dans I.
Or pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$. Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans I. C'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
• Le deuxième point se démontre de manière analogue.

Exemple :

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $x \mapsto \cos x - x$.

IV 2 Théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes (admis)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), avec A un réel.
Soit l un réel.
Si pour tout x de I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si g et h ont la même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Remarques :
• Ce théorème reste valable en $-\infty$ ou en un réel a.
• Ce théorème reste valable également si l'encadrement n'est vérifié qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite. (*Attention, division par* $x > 0$)
2. Déterminer de même la limite de f en $-\infty$. (*Attention, division par* $x < 0$)
3. Déterminer la limite de f en 0. (*Utiliser le taux de variation de la fonction* sin *en* 0, *ou résultat direct du cours*)

V Limites de la fonction exp

V 1 Limites en infini

Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration (exigible BAC !) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$.
Donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante $[0; +\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f admet sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ soit $e^x > x$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Propriété

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démonstration (exigible BAC !) :

Posons $X = -x$. Ainsi, $e^x = e^{-X}$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. Donc par limite de fonction composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

V 2 Des limites importantes

Propriété

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x+0} - e^0}{x - 0}$.
On reconnait la limite, quand x tend vers 0, du taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et $0 + x$; or la fonction exp est dérivable en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$.

Propriété

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - x$.
Or, pour tout réel x, $e^x > x$ (vu au-dessus), donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.
Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$, d'où $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, soit $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ (car $x > 0$).
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Propriété

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Démonstration :

Posons $X = -x$. Ainsi, $xe^x = -Xe^{-X} = -\dfrac{X}{e^X}$.
On a vu précédemment que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, d'où, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{X}{e^X}\right) = 0$.
Donc par limite de fonction composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.