FONCTION EXPONENTIELLE

Analyse - Chapitre 3

Table des matières

I La fonction exponentielle **2**
I 1 Un résultat préliminaire 2
I 2 Définition de la fonction exponentielle 2

II Propriétés de la fonction exponentielle **3**
II 1 Relation fonctionnelle 3
II 2 Signe de la fonction exp 4
II 3 Propriétés algébriques de la fonction exp 4
II 4 Nouvelle notation 5

III Étude de la fonction exponentielle **5**
III 1 Sens de variation de la fonction exp 5
III 2 Limites de la fonction exp 6
III 3 Courbe représentative de la fonction exp 6
III 4 Des limites importantes 7

I La fonction exponentielle

I 1 Un résultat préliminaire

Propriété

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Exemples :

- Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$; g et h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x+3)$ et $h(x) = f(5-x)$.
  1. Calculer $g(2)$ et $h(-3)$.
  2. Déterminer les dérivées de g et h.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{5-3x}$.
  1. Déterminer l'ensemble de définition D_f et l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de la fonction f.
  2. Calculer pour tout x de $D_{f'}$, $f'(x)$.

Démonstration :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a et b deux réels et $g : x \mapsto f(ax+b)$;

Pour tout réel h non nul, $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} =$
$\dfrac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h} = \dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{h} = \dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah} \times a$.

Or $\dfrac{f(X+H)-f(X)}{H}$ tend vers $f'(X)$ quand H tend vers 0.

Donc $\dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}$ tend vers $f'(ax+b)$ quand h tend vers 0.

Donc $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ tend vers $a \times f'(ax+b)$ quand h tend vers 0.

I 2 Définition de la fonction exponentielle

Notation : On notera l'égalité $f(x) = g(x)$, pour tout x réel, sous la forme réduite $f = g$.

Lemme

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Remarque : un lemme est un résultat préalable à la démonstration d'une propriété.

Démonstration :

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$. D'après le **1)**, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
Donc ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$, donc pour tout nombre réel x, $\phi(x) = 1$ et ainsi $f(x) \times f(-x) = 1$. Donc pour tout nombre réel x, $f(x) \neq 0$.

Propriété et définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. C'est la **fonction exponentielle**, notée **exp**.

Démonstration :

1) Existence :
Conformément au programme, on admet l'existence d'une telle fonction.

2) Unicité (Démonstration exigible BAC ! !)
Supposons qu'il existe une autre fonction nommé g définie sur $\mathbb{R}$ et différente de f telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. Alors la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est définie (f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après le lemme) et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$h' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ est la fonction nulle car $f' = f$ et $g' = g$, donc h est constante sur R.
Or $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$, donc pour tout nombre réel x, $h(x) = 1$, c'est-à-dire $g(x) = f(x)$. Impossible d'après l'hypothèse de départ. Ainsi $g = f$.

Conséquence

Pour tout nombre réel x,
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

II Propriétés de la fonction exponentielle

II 1 Relation fonctionnelle

Propriété

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (f existe car $\exp \neq 0$ sur $\mathbb{R}$)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$ (car $\exp' = \exp$)

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $f(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ donc pour tout x réel, $f(x) = \exp(y)$, soit $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$, donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

II 2 Signe de la fonction exp

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$.

Or la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$.

II 3 Propriétés algébriques de la fonction exp

Propriété

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Démonstration :

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$ d'après la relation fonctionnelle. Or $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$, donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x_1, x_2, ... , x_n ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\exp(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times ... \times \exp(x_n)$$

Démonstration en exercice :

Démontrer la propriété ci-dessus par récurrence.

Propriété

Pour tous nombre réel x et tout nombre entier relatif n, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Démonstration :

- Lorsque $n > 0$, on obtient l'égalité en appliquant la propriété précédente dans le cas particulier où $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$.
- Lorsque $n = 0$, l'égalité est vérifiée car $\exp(0) = 1$.
- Lorsque $n < 0$, $\exp(nx) = \exp((-n)(-x))$. Or $-n > 0$ donc d'après le premier cas, $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n}$. Donc $\exp(nx) = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^{-n} = (\exp(x))^n$.

II 4 Nouvelle notation

Posons $\mathrm{e} = \exp(1)$ et avec la calculatrice, $\mathrm{e} \approx 2,718$.

Pour tout nombre entier relatif n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
Par extension, on peut noter pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ (lire « *e* exposant x »)
On définit ainsi n'importe quelle puissance **RÉELLE** du nombre e.

Nouvelles écritures des propriétés

Pour tous nombres réels x et y et tout nombre entier relatif n, on a :
$\mathrm{e}^0 = 1$ $\quad$ $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ $\quad$ $\mathrm{e}^x > 0$ $\quad$ $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$ $\quad$ $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ $\quad$ $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

Remarque : On retrouve les propriétés habituelles de calcul sur les puissances.

Exemples :

Simplifier les écritures suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x+2} \times \mathrm{e}^{-x+2}$.
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^{-x+1}}$.
3. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$

III Étude de la fonction exponentielle

III 1 Sens de variation de la fonction exp

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. Or pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence immédiate

Pour tous nombres réels a et b :
$\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ équivaut à $a < b$ $\qquad$ $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ équivaut à $a = b$.

Exemples :

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$
2. $\mathrm{e}^{2x+3} - 1 = 0$
3. $\mathrm{e}^{3x+1} - \mathrm{e}^{-x} < 0$
4. $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} = 3$ (*changement de variable* $X = \mathrm{e}^x$)

III 2 Limites de la fonction exp

Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démonstration (exigible BAC !) :

Les démonstrations seront faites dans le chapitre **04 - Limites de fonctions**.

III 3 Courbe représentative de la fonction exp

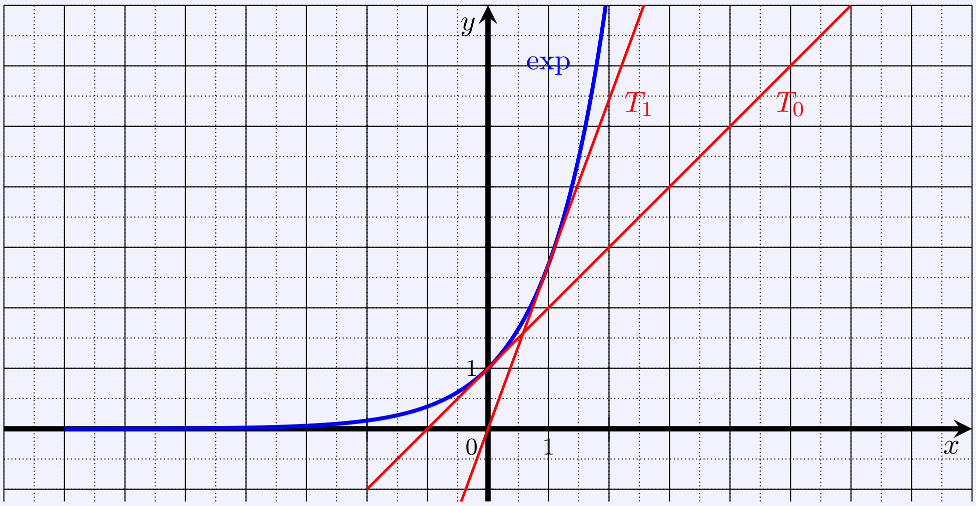
Tableau de variations détaillé de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$		
$\exp$	0	1	e	$+\infty$

Tracés de tangentes pour le tracé de la courbe de la fonction exp :

1. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 0. (*réponse* : $y = x + 1$).
2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 1. (*réponse* : $y = \mathrm{e}\,x$).

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque :
$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de exp en $-\infty$.

III 4 Des limites importantes

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Les démonstrations seront faites dans le chapitre **04 - Limites de fonctions**.