

LIMITES DE SUITES

Analyse - Chapitre 2

TABLE DES MATIÈRES

I	Limite finie ou infinie d'une suite	2
II	Opérations sur les limites	2
II 1	Limite d'une somme	3
II 2	Limite d'un produit	3
II 3	Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$	3
II 4	Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	3
II 5	Formes indéterminées	4

I LIMITE FINIE OU INFINIE D'UNE SUITE

II OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

II 1 Limite d'une somme

Si u a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
Si v a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $u + v$ a pour limite				

Remarque : les rôles de u et v peuvent être échangés.

II 2 Limite d'un produit

Si u a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
Si v a pour limite	l'	∞	∞	∞
Alors uv a pour limite				

Remarques :

- les rôles de u et v peuvent être échangés.
- On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

II 3 Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Si u a pour limite	l	l	∞	∞
Si v a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l \neq 0$	∞
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite				

Remarque : On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

II 4 Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Si u a pour limite	$l \neq 0$ ou ∞	0
Si v a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite		

Remarque : On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

II 5 Formes indéterminées

Les quatre cases ????? dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut déterminer la limite de manière générale :

• **Forme indéterminée $+\infty - \infty$:**

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$
$2n + 1$	$-n$				
$n^2 + 1$	$-n^2$				
$n + \frac{1}{n}$	$-n$				

• **Forme indéterminée $\infty \times 0$:**

u_n	v_n	$u_n \times v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$
n^2	$\frac{1}{n}$				
n	$-\frac{1}{n^2}$				
$5n^3$	$\frac{2}{n^3}$				

• **Forme indéterminée $\infty \times 0$:**

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \div v_n$
n	$3n$				
$2n^2$	$-n$				
n	$2n^3$				

• **Forme indéterminée $\frac{0}{0}$:**

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \div v_n$
$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$				
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$				

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent.

Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction ni apparaître sur une copie !**

Exercice :

Soit $u_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{n + 1}$ et $v_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$.

Déterminer les limites des suites u et v quand n tend vers $+\infty$.