LIMITES DE SUITES

Analyse - Chapitre 2

TABLE DES MATIÈRES

I Limite finie ou infinie d'une suite **2**
- I 1 Limite finie : suite convergente 2
- I 2 Limite infinie 2

II Opérations sur les limites **3**
- II 1 Limite d'une somme 3
- II 2 Limite d'un produit 3
- II 3 Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \neq 0$ 4
- II 4 Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ 4
- II 5 Formes indéterminées 4

III Limites et comparaison **5**
- III 1 Théorème de comparaison 5
- III 2 Théorème d'encadrement 6

IV Convergence des suites monotones **7**
- IV 1 Suite majorée, minorée, bornée 7
- IV 2 Différents théorèmes 7

V Limite d'une suite géométrique **9**

I Limite finie ou infinie d'une suite

I 1 Limite finie : suite convergente

Définition

Soit u une suite et l un réel.
On dit que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u converge vers l et que l est la limite de u, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

(Faire un schéma)

Exemples :

Les suites de référence $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^3}$, $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

Démonstration pour $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$:

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 : il existe alors deux réels $\lambda < 0$ et $\mu > 0$ tel que $I =]\lambda ; \mu[$.
I contient 0 donc $\lambda < 0$.
Donc $\lambda < \dfrac{1}{n^2} < \mu \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n^2} < \mu$ (car $\dfrac{1}{n^2}$ est strictement positif pour tout n)
$\Leftrightarrow n^2 > \dfrac{1}{\mu}$ (car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$)
$\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur Ø0; $+\infty$[)
Donc à partir du premier rang strictement supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$, I contient tous les $\dfrac{1}{n^2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

I 2 Limite infinie

Définition

Soit u une suite.
On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u diverge vers $+\infty$ et que $+\infty$ est la limite de u, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(Faire un schéma)

Remarque :
On définit de même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ avec un intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$.

Exemples :

Les suites de référence $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n^3$, $n \mapsto \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration pour $n \mapsto \sqrt{n}$:

Soit A un réel.
Si $A < 0$, alors on a bien $\sqrt{n} > A$.
Si $A > 0$, alors $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$ (car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$)
Donc à partir du premier rang strictement supérieur à A^2, I contient tous les $\sqrt{n}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Remarques :
Certaines suites n'admettent pas de limite.
Exemple : la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.
On dit alors que la suite u diverge ou est divergente.

II Opérations sur les limites

II 1 Limite d'une somme

Si u a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
Si v a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $u+v$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	?????

Remarque : les rôles de u et v peuvent être échangés.

II 2 Limite d'un produit

Si u a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
Si v a pour limite	l'	∞	∞	∞
Alors uv a pour limite	ll'	∞	∞	?????

Remarques :
• les rôles de u et v peuvent être échangés.
• On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

II 3 Limite d'un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

Si u a pour limite	l	l	∞	∞
Si v a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l \neq 0$	∞
Alors $\dfrac{u}{v}$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	∞	?????

Remarque : On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

II 4 Limite d'un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Si u a pour limite	$l \neq 0$ ou ∞	0
Si v a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
Alors $\dfrac{u}{v}$ a pour limite	∞	?????

Remarque : On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

II 5 Formes indéterminées

Les quatre cases ????? dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut déterminer la limite de manière générale :

• **Forme indéterminée** $+\infty - \infty$ **:**

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$
$2n+1$	$-n$	$n+1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
n^2+1	$-n^2$	1	$+\infty$	$-\infty$	1
$n+\dfrac{1}{n}$	$-n$	$\dfrac{1}{n}$	$+\infty$	$-\infty$	0

• **Forme indéterminée** $\infty \times 0$ **:**

u_n	v_n	$u_n \times v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$
n^2	$\dfrac{1}{n}$	n	$+\infty$	0	$+\infty$
n	$-\dfrac{1}{n^2}$	$-n$	$+\infty$	0	0
$5n^3$	$\dfrac{2}{n^3}$	10	$+\infty$	0	10

• **Forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$:**

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$
n	$3n$	$\dfrac{1}{n}$	$+\infty$	$+\infty$	$\dfrac{1}{3}$
$2n^2$	$-n$	$-n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
n	$2n^3$	$\dfrac{1}{2n^2}$	$+\infty$	$+\infty$	0

• **Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$:**

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$
$\dfrac{3}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	3	0	0	3
$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n^2}$	n	0	0	$+\infty$

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent.
Pour les mémoriser, on les note « $\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction ni apparaitre sur une copie**!

Exercice :

Soit $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{n+1}$ et $v_n = n-\sqrt{n^2+1}$.
Déterminer les limites des suites u et v quand n tend vers $+\infty$.

Correction :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$? (FI $\dfrac{\infty}{\infty}$) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$? (FI $+\infty-\infty$)

• $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

III Limites et comparaison

III 1 Théorème de comparaison

Théorème de comparaison

Soit u et v deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0,
- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration BAC :

• Il s'agit de prouver que tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite v à partir d'un certain rang.
Soit A un nombre quelconque.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc par définition, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Notons p ce rang.
On sait aussi qu'à partir du rang n_0, $u_n \leqslant v_n$. Notons alors N le plus grand des deux entiers n_0 et p.
A partir du rang N, l'intervalle $]A:+\infty[$ contient tous les termes u_n et donc *a fortiori* tous les termes v_n puisque l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ est alors vérifiée.
Ceci étant vrai quel que soit le réel A, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• Démonstration analogue. (*A faire chez soi en exercice*)

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + (-1)^n$.

1. Justifier que la suite n'est pas monotone.
2. Déterminer sa limite quand n tend vers ∞.

Corrigé :

1. Il suffit de calculer les premiers termes : $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$, $u_4 = 5$...
2. $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1, selon la parité de n. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$.
   Donc $n + (-1)^n \geqslant n - 1$, soit $u_n \geqslant n - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

III 2 Théorème d'encadrement

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) (admis)

Soit u, v et w trois suites telles que :
• $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang n_0,
• v et w convergent vers la même limite l,
alors la suite u converge et sa limite est l.

Exemple :

Étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{2+3\cos n}{n}$.

Correction :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$
Donc $-1 \leqslant 2 + 3\cos n \leqslant 5$
Donc avec $n \neq 0$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{n}$. (car $n > 0$)

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

IV Convergence des suites monotones

IV 1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition

- On dit qu'une suite u est **majorée** si il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- On dit qu'une suite u est **minorée** si il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite est **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

Remarque 1 :
Si une suite u admet un majorant (resp. minorant), alors ce majorant (resp. minorant) n'est pas unique :
- Si u est majorée par un réel M, alors elle est majorée par tout réel supérieur à M.
- Si u est minorée par un réel m, alors elle est minorée par tout réel inférieur à m.

Remarque 2 :
- Si une suite admet un maximum, alors ce maximum est le plus petit des majorants.
- Si une suite admet un minimum, alors ce minimum est le plus grand des minorants.

Exemples :

- $u_n = 3 - \sqrt{n}$. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$ donc la suite u est majorée par 3 (et donc par n'importe quel réel supérieur ou égal à 3).

- $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite u est bornée car, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. (Elle est minorée par 0 - et tout nombre inférieur à 0, et majorée par 1 - et tout nombre supérieur à 1)

IV 2 Différents théorèmes

Théorème (admis)

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarque importante :
Attention, ce théorème prouve uniquement l'existence d'une limite finie, mais ne permet pas de déterminer la valeur de cette limite !

Théorème

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration :

- Soit u une suite croissante non majorée et A un réel.
u est non majorée, donc il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > \mathrm{A}$.
u est croissante, donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > \mathrm{A}$.
Donc à partir du rang n_0, l'intervalle $]\mathrm{A}; +\infty[$ contient tous les termes u_n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- *Démonstration analogue.*

Exercice :

Soit $u_n = 2^n - n$.

1. Montrer que la suite u est croissante.
2. On admet que u est non majorée. Écrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel $u_n > A$, A étant un réel donné.

Correction :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1 \geqslant 0$ pour $n \geqslant 0$ donc u est croissante.
2. Pour $A = 10$, on obtient $n = 4$. Pour $A = 50$, on obtient $n = 6$. Pour $A = 10^6$, on obtient $n = 20$.

```
1.1  1.2   *Non enregistré
algochapsuite                      7/7
Define algochapsuite()=
Prgm
u(n):=2^n-n
Request "nombre A=",a
n:=0
While u(n)<a
n:=n+1
EndWhile
Disp n
EndPrgm
```

Théorème

- Si une suite u est croissante et admet pour limite l, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant l$.
- Si une suite u est décroissante et admet pour limite l, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant l$

Démonstration :

- Soit u une suite croissante et qui converge vers un réel l.

Raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > l$ et posons $I =]-\infty; u_{n_0}[$.

I est un intervalle ouvert contenant l, donc il contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang n_1 : $\forall n \geqslant n_1$, $u_n < u_{n_0}$

Or u étant croissante, on a $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$: impossible !

- *Démonstration analogue.*

V LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit u une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de raison q non nulle.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
D'après les théorèmes sur les opérations et les limites, pour déterminer le comportement de la suite u à l'infini, il suffit de connaitre celui de la suite v définie par $v_n = q^n$.

Théorème

Soit q un réel.

Si $q \leqslant -1$	:	la suite (q^n) n'a pas de limite.
Si $-1 < q < 1$	:	la suite (q^n) converge vers 0.
Si $q = 1$	:	la suite (q^n) converge vers 1.
Si $q > 1$	:	la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration dans le cas où $q > 1$, exigible BAC!! :

$q > 1$. Posons alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
Soit P_n : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ » :

• **Initialisation :** $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc P_0 est vraie.

• **Hérédité :** Supposons P_n vraie pour un certain n fixé et montrons alors que P_{n+1} est vraie.
Hypothèse de récurrence : P_n : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ »
Ce que l'on veut montrer : P_{n+1} : « $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$ »

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$
Or $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (Hypothèse de récurrence)
Donc $(1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$ (car $1 + a > 0$)
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$ (car $na^2 \geqslant 0$).
Donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** La proposition P_n est vraie au rang 0, de plus elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

b) Retour à la démo :
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geqslant 1 + na$ avec $a > 0$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Exemples :

1. Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -5(\sqrt{3})^n$.
2. Déterminer la limite de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3\left(1-\sqrt{2}\right)^n$.
3. Déterminer la limite de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$
4. La suite z définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$ a-t-elle une limite ?

Correction :

1. $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $1-\sqrt{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{3^{n+1}}{(-2)^n} = 3 \times \dfrac{3^n}{(-2)^n} = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$.

   Or $-\frac{3}{2} < -1$ donc $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ n'a pas de limite, donc la suite z non plus.