RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Analyse - Chapitre 1

Table des matières

I Exemple

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Calculons les premiers termes de cette suite :
$u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 4$; $u_4 = 5$ ...
Il semble que $u_n = n + 1$. Comment le prouver ? Comment prouver que $u_{78} = 79$?
Est-il nécessaire de calculer tous les termes jusqu'à 78 ? Et après ?
Supposons que $u_{77} = 78$. Alors $u_{78} = 10 \times 78 - 9 \times 77 - 8 = 79$
Et si $u_n = n + 1$, alors $u_{n+1} = 10 \times (n + 1) - 9n - 8 = n + 10 - 8 = n + 2 = (n + 1) + 1$
Or $u_4 = 4 + 1$, donc $u_5 = 5 + 1$, donc $u_6 = 6 + 1$ etc...

II Le raisonnement par récurrence

II 1 Proposition mathématique

Définition

Une proposition mathématique est un énoncé portant sur des objets mathématiques ; elle peut être vraie ou fausse.
Le raisonnement par récurrence s'intéresse à des propositions portant sur des entiers naturels.

Exemple :

« $n^2 - 3n + 2 = 0$ » est une proposition dépendant de l'entier n, qu'on peut noter (P_n).

(P_2) est vraie ; (P_1) est vraie ; (P_0) est fausse.

Dans l'exemple vu au **I**, on peut noter (P_n) : « $u_n = n + 1$ ». La proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n. *(Démonstration plus tard)*

II 2 Le principe de récurrence

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en trois étapes :

Première étape : INITIALISATION
On vérifie que (P_{n_0}) est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0. On dit qu'on a **initialisé** la récurrence.

Deuxième étape : HÉRÉDITÉ
On suppose que pour un entier n quelconque $(n \geqslant n_0)$, la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse (dite de récurrence), on démontre que la proposition (P_{n+1}) est vraie. On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence « (P_n) est vraie » est **héréditaire**.

Troisième étape : CONCLUSION
Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on **conclut** que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n, $n \geqslant n_0$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n + 1$.

Correction :
Soit (P_n) la proposition « $u_n = n + 1$ ».

1) Initialisation
Montrons que (P_0) est vraie.
(P_0) : « $u_0 = 0 + 1$ ».
D'une part, $u_0 = 1$ (d'après l'énoncé) et d'autre part $0 + 1 = 1$ donc (P_0) est vraie.

2) Hérédité
Supposons que (P_n) est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 0$ fixé et montrons alors que (P_{n+1}) est vraie.

Hypothèse de récurrence : (P_n) : « $u_n = n + 1$ »
Ce que l'on veut montrer : (P_{n+1}) : « $u_{n+1} = (n + 1) + 1$ », soit « $u_{n+1} = n + 2$ »

On sait que $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Donc $u_{n+1} = 10 \times (n + 1) - 9n - 8$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
D'où $u_{n+1} = 10n + 10 - 9n - 8 = n + 2$
Donc (P_{n+1}) est vraie.

3) Conclusion :
La proposition (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1$

II 3 Exercices

Exercices :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.