GRAPHES PROBABILISTES

Chapitre 4

Table des matières

I Graphes probabilistes

I 1 Problème

Problème 3 : L'allumeur de réverbères– *Manuel page 74.*

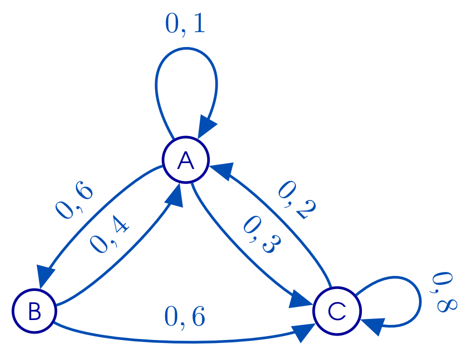
Objectif : Introduire la matrice de transition d'un graphe probabiliste.

I 2 Définition

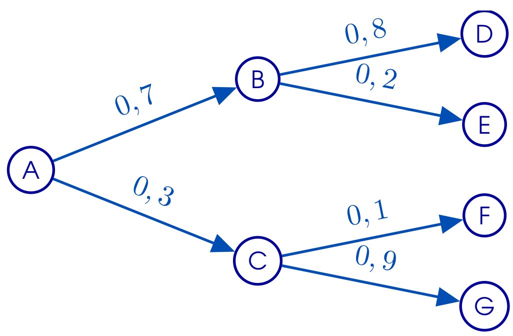
Définition d'un graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est un graphe **orienté** et **pondéré** tel que :
• Il y a au plus un arc d'un sommet vers un autre ;
• La somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Exemple :



Remarque :
Un arbre de probabilité est donc un graphe probabiliste !



Intérêt des graphes probabilistes :
Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :
• Les sommets du graphe sont les états possibles du système ;
• Le poids d'un arc issu du sommet S_i et d'extrémité S_j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'événement S_j à l'étape $n+1$ sachant que l'événement S_i est réalisé à l'étape n.

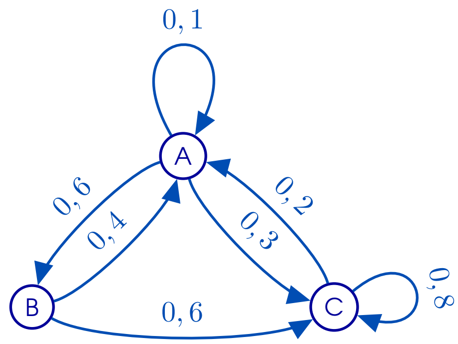
I 3 Matrice de transition

On a vu que dans un graphe probabiliste, le poids d'un arc correspond à la probabilité de passage d'un état à l'autre. Nous pouvons donc associer à chaque graphe probabiliste une matrice, appelée **matrice de transition** (à ne pas confondre avec la matrice d'adjacence !).

Définition d'une matrice de transition

Soit G un graphe probabiliste d'ordre n, avec n un entier naturel non nul.
On appelle **matrice de transition** associé à G la matrice carrée $T = (t_{i,j})$ d'ordre n telle que :
Pour tous entiers i et j compris entre 1 et n, le coefficient $t_{i,j}$ est égal au poids de l'arc d'origine le sommet S_i et d'extrémité le sommet S_j si cet arc existe, et qui est égal à 0 sinon.

Exemple :



Graphe G

$$T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Matrice T de transition associée à G

Remarques :
• Tous les coefficients sont des réels compris entre 0 et 1 ;
• La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 ;
• Le coefficient $t_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état S_j à l'instant $n + 1$ sachant que l'on est dans l'état S_i à l'instant n.

II État probabiliste et état stable

II 1 État probabiliste

Problème 4 : Transferts de population– *Manuel page 74.*
$\Longrightarrow$ **Questions 1, 2, 5 :** *(Attention, erreur dans la définition de P_n, peu précise.)*
– Graphe probabiliste, matrice de transition.
– Découverte d'une matrice ligne représentant un état probabiliste, état initial.

Définition d'un état probabiliste

On considère une expérience aléatoire à k issues possibles ($k \in \mathbb{N}$). A chacune des issues i est associée une probabilité p_i. Après chaque expérience, l'objet étudié se retrouve dans un état donné. On peut alors associer des probabilités à cet état.
On appelle **état probabiliste** à l'étape n, pour n entier naturel, la matrice ligne :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{k-1} & p_k \end{pmatrix}$$

où chaque p_i est égal à la probabilité que l'objet étudié soit à l'état i à la n-ième étape.

Remarque :
On a, pour tout état probabiliste P_n : $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

Problème 4 SUITE : Transferts de population– *Manuel page 74.*
$\Longrightarrow$ **Questions 3 et 4 :**
– Découverte de la relation entre deux états probabilistes consécutifs.
– Découverte de la relation entre P_n, P_0 et T.

Propriété des graphes probabilistes

Soit T la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre k, $k \in \mathbb{N}$ et soit n un entier naturel.

• Si P_n est l'état probabiliste à l'étape n et P_{n+1} l'état probabiliste à l'étape $n+1$, alors :

$$P_{n+1} = P_n \times T$$

• Si P_0 est l'état probabiliste initial et P_n celui à l'étape n, alors :

$$P_n = P_0 \times T^n$$

II 2 État stable

Problème 4 FIN : Transferts de population– *Manuel page 74.*
$\Longrightarrow$ **Questions 6, 7, 8 :**
– Utiliser les formules géométriques pour conjecturer le comportement sur le long terme.
– Découverte d'un éventuel état stable.

Définition

Un état probabiliste P est dit **stable** si, et seulement si, il n'évolue pas lors de la répétition de l'expérience, c'est-à-dire lorsque :

$$P = P \times T$$

où T est la matrice de transition du graphe associé.

Remarque :
L'existence d'un état stable n'est pas systématique. On peut cependant obtenir le résultat suivant, dans le cas particulier des graphes probabilistes à deux états :

Propriété

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 ou 3 dont la matrice de transition T ne comporte pas de 0 , l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.

Remarque :
Il existe une condition moins restrictive : il suffit qu'une **puissance** de la matrice T ne comporte pas de 0 pour que le système admette un état stable.