GRAPHES ET RECHERCHE DU PLUS COURT CHEMIN

Chapitre 3

Table des matières

I Graphes étiquetés

I 1 Problème 1

Problème 1 : Avec un ordinateur - PARTIE A uniquement – *Manuel page 68.*

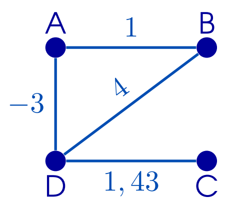
Objectif : Découvrir et utiliser les graphes étiquetés.

I 2 Définition

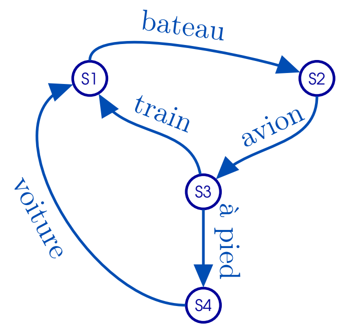
Définition

Un graphe étiqueté est un graphe où chaque arête/arc est affecté(e) soit d'une chaîne de caractères, soit d'un nombre, appelé **étiquette**.

Exemples :



Graphe G_1



Graphe G_2

I 3 Reconnaissance de mots dans un graphe

Problème 1 suite : Avec un ordinateur - PARTIE B uniquement – *Manuel page 68.*

Objectif : Découvrir et utiliser les automates.

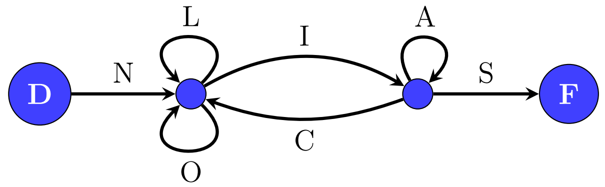
Définition

Soit G un graphe orienté étiqueté où un sommet est marqué « Départ » (ou « Début » etc) et un autre « Arrivée » (ou « Fin » etc).

Dans un tel graphe, on appelle **mot reconnu** par le graphe toute suite d'étiquettes telle qu'il existe un chemin partant du sommet « Départ » et arrivant au sommet « Arrivée » et dont chacune des étiquettes soit associée dans l'ordre à un arc de ce chemin.

Sinon, le mot est dit **refusé**.

Exemple :



Quelques mots reconnus par cet automate :

- NIAS
- NOOOIAAAAAAAAAS
- NLOIS

Remarques :
- Le très joli prénom NICOLAS peut-il être reconnu par cet automate ?
- Chaque mot reconnu par cet automate commence nécessairement par un N et se termine nécessairement par un S.

II Graphes pondérés

II 1 Problème 2

Problème 2 : Itinéraire routier – *Manuel page 69 : Questions 1 à 4.*

Objectif : Découvrir les graphes pondérés, la notion de plus courte chaîne.

II 2 Définitions

Définitions

- Un graphe pondéré non orienté est un graphe où chaque arête est affectée d'un nombre réel positif, appelé poids de cette arête.
- Le poids d'une chaine est la somme des poids des arêtes qui la composent.
- Une plus courte chaine entre deux sommets est, parmi les chaines qui les relient, une chaine de poids minimum.

Remarque :
On définit de même un graphe pondéré orienté en remplaçant « arête » par « arc » et « chaîne » par « chemin ».

III Recherche d'un plus court chemin

III 1 Problème 2 – suite

Problème 2 (suite) : Itinéraire routier – *Manuel page 69 : Question 5.*

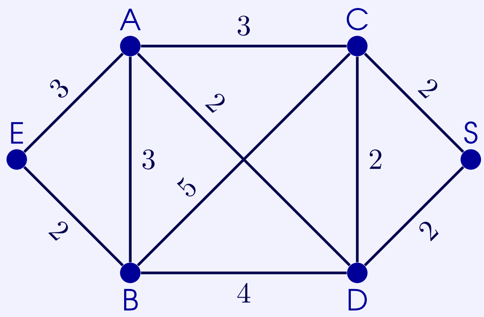
Objectif : Découvrir l'algorithme de Dijkstra.

III 2 Algorithme de Dijkstra

Lorsqu'un graphe pondéré comporte de nombreux sommets et de nombreuses arêtes (par exemple un graphe représentant une carte routière), la recherche d'un plus court chemin peut être longue, car il convient d'examiner et de comparer un grand nombre de possibilités. L'algorithme trouvé par Dijkstra propose une méthode commode car, en le suivant pas à pas, on est sûr de n'oublier aucun cas possible. D'autre part, un tel algorithme peut facilement être programmé sur un ordinateur (comme pour un GPS).

Présentation de l'algorithme de Dijkstra

On considère le graphe suivant :



Le problème consiste à trouver un plus court chemin entre les sommets E et S du graphe ci-dessus, en appliquant l'algorithme de Dijkstra, qui consiste à remplir progressivement et ligne par ligne un tableau des sommets.

Initialisation :

On dessine un tableau avec une colonne pour chaque sommet, plus une colonne supplémentaire à droite pour indiquer le sommet sélectionné à chaque étape. Le nombre de lignes du tableau est égal au nombre de sommets du graphe, soit 6 lignes ici (car 6 sommets) :

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné

1ère ligne :

Sur la première ligne du tableau, on affecte le coefficient 0 à l'origine E, et le coefficient ∞ à tous les autres sommets. Le « Sommet sélectionné » est le sommet de plus petit coefficient : il s'agit donc du sommet E. On raye alors toutes les autres cases de la colonne E, en tirant un trait vertical ou en les noircissant :

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E

2$^{\text{ème}}$ ligne :

• Pour chaque **sommet adjacent** à E, on calcule le coefficient affecté à ce sommet. Ici, les sommets adjacents à E sont A et B.

Pour le sommet A :

— On calcule la somme du coefficient du sommet E (0) et du poids de l'arête E$-$A dans le graphe (3), et on obtient $0 + 3 = 3$.

— On compare cette somme au coefficient précédent de A (∞) et on affecte à A le plus petit des deux nombres, soit 3. On le note 3 (E) pour rappeler que le sommet depuis lequel on est arrivé en A est E.

Pour le sommet B :

— On procède de même et on note 2 (E).

• Pour chaque sommet non adjacent à E, on reporte les coefficients de la ligne précédente : pour C, D et S, on réécrit donc ici le coefficient ∞.

Enfin, le « Sommet sélectionné » est toujours le sommet de plus petit coefficient : il s'agit donc ici du sommet B. On peut alors noircir toutes les autres cases de la colonne B.

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E
	$0+3$ 3 (E)	$0+2$ 2 (E)	∞	∞	∞	B

Lignes suivantes :

On remplit de la même façon, de proche en proche, chacune des lignes suivantes du tableau. On s'arrête lorsque tous les sommets ont été sélectionnés :

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E
	$0+3$ 3 (E)	$0+2$ 2 (E)	∞	∞	∞	B
	$2+3$ 3 (**E**)		$2+5$ 7 (B)	$2+4$ 6 (B)	∞	A
			$3+3$ 6 (A)	$3+2$ 5 (**A**)	∞	D
			$5+2$ 6 (A)		$5+2$ 7 (D)	C
					$6+2$ 7 (**D**)	**S**

Lecture du tableau :

• On obtient un plus court chemin entre E et S en l'écrivant, de droite à gauche, de la manière suivante : dans la colonne **S**, on repère le sommet le plus en bas, c'est-à-dire **D** ; puis dans la colonne D, le sommet le plus en bas, c'est-à-dire **A** ; puis enfin dans la colonne A, le sommet inscrit le plus en bas, c'est-à-dire le sommet **E** (en rouge dans le tableau précédent). On obtient alors :

$$\boxed{\text{E–A–D–S}}$$

• Le poids de ce plus court chemin est égal au dernier coefficient de S dans le tableau, soit ici **7**.

Exercice

A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer dans le graphe ci-dessous le plus court chemin allant du sommet A au sommet F :