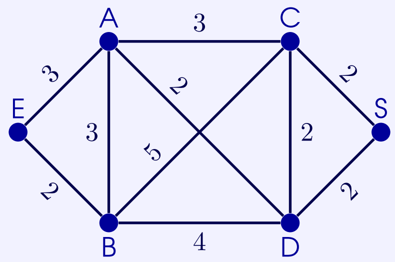
GRAPHES : l'algorithme de Dijkstra

Présentation de l'algorithme de Dijkstra

On considère le graphe suivant :



Le problème consiste à trouver un plus court chemin entre les sommets E et S du graphe ci-dessus, en appliquant l'algorithme de Dijkstra, qui consiste à remplir progressivement et ligne par ligne un tableau des sommets.

Initialisation :

On dessine un tableau avec une colonne pour chaque sommet, plus une colonne supplémentaire à droite pour indiquer le sommet sélectionné à chaque étape. Le nombre de lignes du tableau est égal au nombre de sommets du graphe, soit 6 lignes ici (car 6 sommets) :

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné

1ère ligne :

Sur la première ligne du tableau, on affecte le coefficient 0 à l'origine E, et le coefficient ∞ à tous les autres sommets. Le « Sommet sélectionné » est le sommet de plus petit coefficient : il s'agit donc du sommet E. On raye alors toutes les autres cases de la colonne E, en tirant un trait vertical ou en les noircissant :

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E

2$^{\text{ème}}$ ligne :

• Pour chaque **sommet adjacent** à E, on calcule le coefficient affecté à ce sommet. Ici, les sommets adjacents à E sont A et B.

Pour le sommet A :

- On calcule la somme du coefficient du sommet E (0) et du poids de l'arête E−A dans le graphe (3), et on obtient $0 + 3 = 3$.
- On compare cette somme au coefficient précédent de A (∞) et on affecte à A le plus petit des deux nombres, soit 3. On le note 3 (E) pour rappeler que le sommet depuis lequel on est arrivé en A est E.

Pour le sommet B :

- On procède de même et on note 2 (E).

• Pour chaque sommet non adjacent à E, on reporte les coefficients de la ligne précédente : pour C, D et S, on réécrit donc ici le coefficient ∞.

Enfin, le « Sommet sélectionné » est toujours le sommet de plus petit coefficient : il s'agit donc ici du sommet B. On peut alors noircir toutes les autres cases de la colonne B.

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E
	$0+3$ 3 (E)	$0+2$ 2 (E)	∞	∞	∞	B

Lignes suivantes :

On remplit de la même façon, de proche en proche, chacune des lignes suivantes du tableau. On s'arrête lorsque tous les sommets ont été sélectionnés :

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E
	$0+3$ 3 (E)	$0+2$ 2 (E)	∞	∞	∞	B
	$2+3$ 3 (**E**)		$2+5$ 7 (B)	$2+4$ 6 (B)	∞	A
			$3+3$ 6 (A)	$3+2$ 5 (**A**)	∞	D
			$5+2$ 6 (A)		$5+2$ 7 (D)	C
					$6+2$ 7 (**D**)	**S**

Lecture du tableau :

• On obtient un plus court chemin entre E et S en l'écrivant, de droite à gauche, de la manière suivante : dans la colonne **S**, on repère le sommet le plus en bas, c'est-à-dire **D** ; puis dans la colonne D, le sommet le plus en bas, c'est-à-dire **A** ; puis enfin dans la colonne A, le sommet inscrit le plus en bas, c'est-à-dire le sommet **E** (en rouge dans le tableau précédent). On obtient alors :

$$\boxed{\text{E}-\text{A}-\text{D}-\text{S}}$$

• Le poids de ce plus court chemin est égal au dernier coefficient de S dans le tableau, soit ici **7**.