GRAPHES

Chapitre 2

Table des matières

I Généralités sur les graphes **2**
I 1 Problème 1 2
I 2 Premières définitions 2
I 3 Problème 2 3
I 4 Lemme des poignées de mains 3
I 5 Boucle et graphe simple 4
I 6 Sous-graphes 5

II Chaînes et cycles d'un graphe **6**
II 1 Chaîne, longueur, cycle 6
II 2 Distance entre deux sommets et diamètre d'un graphe 6
II 3 Graphe connexe 7

III Graphes eulériens **7**
III 1 Problème 3 7
III 2 Chaînes eulériennes 7
III 3 Cycles eulériens 7
III 4 Graphes eulériens 8
III 5 Problème 4 8
III 6 Théorème d'Euler 8

IV Graphe orienté **9**
IV 1 Problème 5 9
IV 2 Définition 9

V Matrice d'adjacence d'un graphe simple **10**
V 1 Problème 6 10
V 2 Représentation matricielle d'un graphe 10
V 3 Propriétés 11
V 4 Nombre de chaînes de longueur n d'un graphe 11

I Généralités sur les graphes

I 1 Problème 1

Problème 1 : Les Aventuriers du Rail

Manuel page 36.

Objectif : acquérir le vocabulaire de base des graphes (ordre, sommet, arête, degré...)

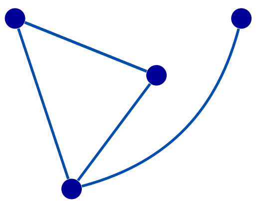
I 2 Premières définitions

Définitions

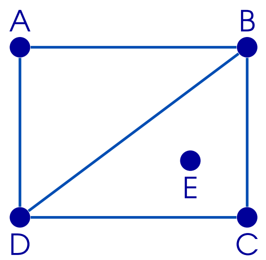
- Un graphe est un ensemble constitué de **sommets** pouvant être reliés par des **arêtes**.
- Les **sommets** sont généralement représentés par des **points** et les **arêtes** par des **segments** ou des **arcs**.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Un sommet est dit **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet du graphe.

Remarques :
- Les sommets du graphe peuvent être nommés ou non, selon les besoins.
- On peut représenter les sommets par des points ou par des cercles ou des rectangles, contenant éventuellement une étiquette pour nommer le sommet.

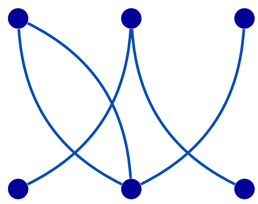
Exemples :



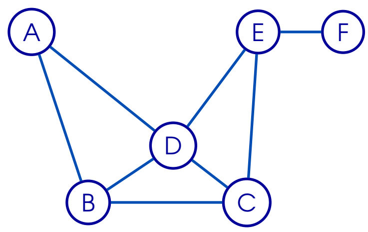
Graphe G_1



Graphe G_2

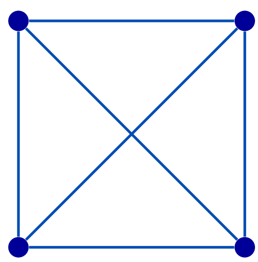


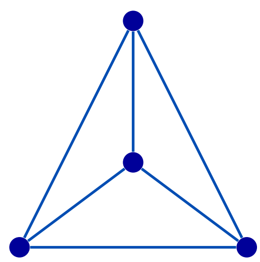
Graphe G_3



Graphe G_4

Remarque : Plusieurs représentations d'un même graphe sont possibles.
Par exemple, un graphe composé de 4 sommets tous adjacents deux à deux peut avoir deux représentations :





Deux représentations d'un même graphe G_5

Définitions : ordre d'un graphe et degré d'un sommet

- L'**ordre d'un graphe** est son nombre total de sommets.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Exemples :

- Le graphe G_1 :
  - son ordre est 4.
  - Il possède un sommet de degré 1, deux sommets de degré 2 et un sommet de degré 3.
  - Il n'a pas de sommet isolé.

Faire de même avec les quatre autres graphes.

Définition : graphe complet

Un graphe est dit **complet** lorsque **tous** ses sommets sont **adjacents** deux à deux.

Exemple :

Parmi les 5 graphes précédents, seul le graphe G_5 est complet.

I 3 Problème 2

Problème 2 : Organisation d'un tremplin musical

Manuel page 36.

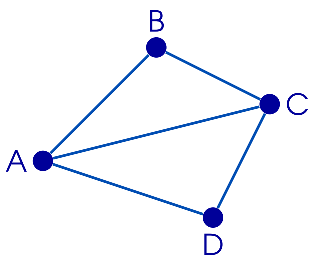
Objectif : chercher à dénombrer les arêtes d'un graphe pour découvrir le lemme des poignées de main, et l'appliquer ensuite.

I 4 Lemme des poignées de mains

Propriété

La **somme des degrés des sommets** d'un graphe non orienté est égale au **double** du **nombre total d'arêtes** de ce graphe.

Exemple :



Le sommet A est de degré 3, le sommet B de degré 2, le sommet C de degré 3 et le sommet D de degré 2.

La **somme des degrés** est donc $3 + 2 + 3 + 2 = 10$.

Le graphe possède **un total de** 5 **arêtes**.

Idée de démonstration

Lorsque l'on fait la somme de tous les degrés d'un graphe, on effectue la somme des extrémités de chaque arête de ce graphe. Or chaque arête a deux extrémités, elle sera donc comptée au total deux fois.

Conséquence :
La somme des degrés des sommets d'un graphe est un **nombre pair.** C'est une condition obligatoire pour la construction d'un graphe.

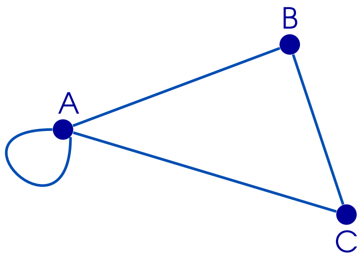
I 5 Boucle et graphe simple

Définition

Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.

Remarque importante pour calculer le degré d'un sommet :
Lorsqu'on détermine le degré d'un sommet comportant une boucle, il faut compter cette boucle **deux fois** : en effet, la boucle représente **deux** « chemins » partant de ce sommet. Elle compte double.

Exemple :



Le graphe ci-contre présente une boucle au sommet A.

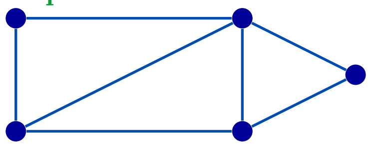
Il y a, partant du sommet A :
- **deux** arêtes « simples » : une avec B et une avec C.
- **une** boucle. Elle compte double.

Conclusion : le degré de ce sommet est donc **4**.

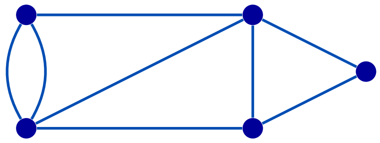
Définition

Un graphe est dit **simple** lorsqu'il ne présente **aucune boucle** et si deux arêtes ne relient **jamais** une même paire de sommets.

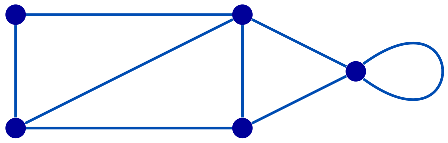
Exemples :



Le graphe ci-contre est **simple**.



Le graphe ci-contre **n'**est **pas simple**.
(deux arêtes relient la même paire de sommets)



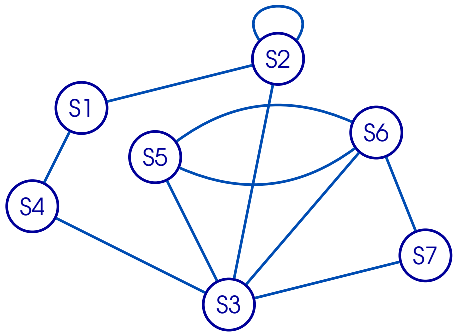
Le graphe ci-contre **n'**est **pas simple**.
(il comporte une boucle)

I 6 Sous-graphes

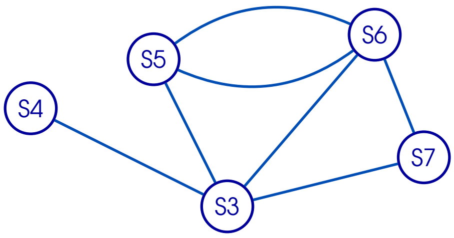
Définition

Soit G un graphe.
Un **sous-graphe** de G est un graphe composé d'**une partie** des sommets de G ainsi que de **toutes les arêtes** qui les relient.

Exemple :



Graphe G.

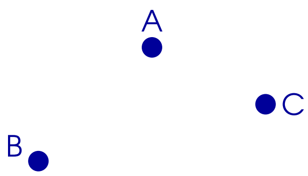


Graphe G', sous-graphe de G engendré par {S3, S4, S5, S6, S7}.

Définition : graphe stable

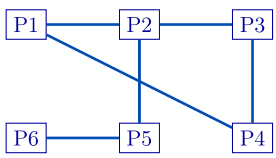
On dit qu'un graphe est **stable** s'il n'a pas d'arêtes.

Exemple :



Le graphe ci-contre, composé de trois sommets et d'aucune arêtes, est **stable**.

Exercice :



Voici le graphe d'incompatibilité de 6 produits chimiques qui doivent être transportés dans des camions. Par exemple, on comprend que le produit P1 ne peut être transporté dans le même camion que les produits P2 ou P4.

Combien de camions au minimum faut-il prévoir pour transporter ces 6 produits ?

Solution :
On cherche des sous-graphes stables du graphe précédent. On peut commencer par créer un sous-graphe stable à partir de P2 (car il a le degré le plus élevé), et lui associer P4 et P6. Les trois sommets restants, n'étant pas adjacents, constituent alors le deuxième sous-graphe stable. Il faut donc deux camions :

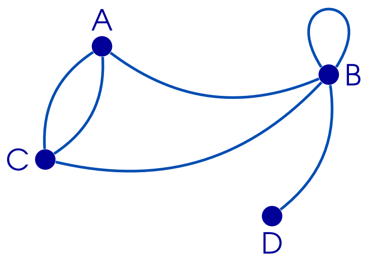
II Chaînes et cycles d'un graphe

II 1 Chaîne, longueur, cycle

Définitions

• Une **chaîne** d'un graphe G est une liste **ordonnée** de sommets de G telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
• Une chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont confondus.
• La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
• Un **cycle** est une **chaîne fermée** composée d'arêtes toutes **distinctes**.

Exemple :



• A-B-C est une **chaîne de longueur 2**. (*car il y a 2 arêtes*)
• A-B-C-D **n'existe pas** car il n'existe pas de chaîne reliant C à D.
• D-B-A-C-B-D est une **chaîne fermée de longueur 5**. Ce n'est pas un cycle car on parcourt deux fois l'arête entre B et D.
• B-A-C-B est un **cycle de longueur 3**.

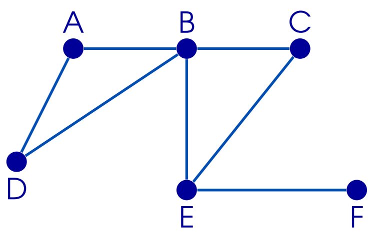
II 2 Distance entre deux sommets et diamètre d'un graphe

Définition

• **La distance entre deux sommets** d'un graphe est la **longueur de la plus courte chaîne** reliant ces deux sommets.
• Le **diamètre** d'un graphe est la **plus longue distance** entre deux sommets quelconques.

Remarques :
- La distance d'un sommet à lui-même est nulle.
- Par convention, la distance entre deux sommets qui ne peuvent être reliés par aucune chaîne est $+\infty$.
- Le diamètre d'un graphe complet est égal à 1.

Exemple :



• La distance de D à E est 2.
• La distance de B à D est 1.
• La distance de A à A est 0.
• Le diamètre de ce graphe est 3 : c'est la distance de A à F.

Pour déterminer le diamètre du graphe, on peut aussi dresser un tableau à double entrée des longueurs et chercher la plus grande longueur :

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	1	2	3
B	1	0	1	1	1	2
C	2	1	0	2	1	2
D	1	1	2	0	2	3
E	2	1	1	2	0	1
F	3	2	2	3	1	0

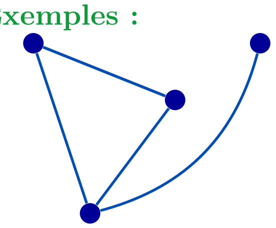
II 3 Graphe connexe

Définition

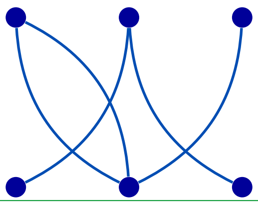
Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de ses sommets par une chaîne.

Remarques :
- Un graphe **complet** est nécessairement **connexe**. (Bien entendu, la réciproque est fausse).
- Le **diamètre** d'un graphe non connexe est égal à $+\infty$.

Exemples :



Le graphe ci-contre est **connexe**.



Le graphe ci-contre **n'est pas connexe**.

III Graphes eulériens

III 1 Problème 3

Problème 3 : Les enveloppes
Manuel page 42.

Objectif : découvrir les chaines eulériennes et émettre une conjecture (cf. problème 6 ensuite).

III 2 Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe. Une **chaîne eulérienne** est une chaîne de G qui contient **une et une seule fois** chaque arête de G.

III 3 Cycles eulériens

Définition

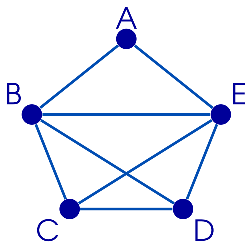
Soit G un graphe. Un **cycle eulérien** de G est une chaîne eulérienne de G qui est un cycle, c'est-à-dire une chaîne eulérienne dont les extrémités sont confondues.

III 4 Graphes eulériens

Définition

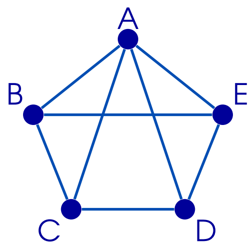
Soit G un graphe. On dit que G est un **graphe eulérien** si et seulement si il admet un **cycle** eulérien.

Exemples :



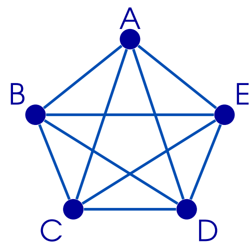
Graphe G_1

G_1 a une chaine eulérienne : C-B-A-E-B-D-E-C-D.
G_1 n'a pas de cycle eulérien.
G_1 **n'est pas donc eulérien**.



Graphe G_2

G_2 n'a pas de chaîne eulérienne.
G_2 n'a pas de cycle eulérien.
G_2 **n'est pas donc eulérien**.



Graphe G_3

G_3 a plusieurs chaînes eulériennes et plusieurs cycles eulériens. Par exemple : A-C-E-A-B-D-E-B-C-D-A.
G_3 **est donc eulérien**.

III 5 Problème 4

Problème 4 : Les Sept Ponts de Königsberg - *Manuel page 42.*

Objectif : découvrir le théorème d'Euler à travers le problème historique qui en fut à l'origine.

III 6 Théorème d'Euler

Le théorème suivant est très souvent utilisé dans les exercices pour déterminer si un graphe possède ou non une chaîne eulérienne :

Théorème d'Euler

Soit G un graphe **connexe**. G admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de **degré impair** est **0** ou **2**.

En particulier :
• **Si le nombre de sommet de degré impair de G est 0 :**
G admet une chaine eulérienne **fermée**, c'est-à-dire un **cycle eulérien**.

• **Si le nombre de sommets de degré impair de G est 2 :**
G admet une chaine eulérienne mais pas de cycle eulérien.

Dans tous les autres cas, G n'admet ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien.

Remarque :
S un graphe possède une chaîne eulérienne, alors il suffit d'ajouter une arête entre les deux sommets de degré impair pour en faire un cycle eulérien et rendre ainsi le graphe eulérien.

IV Graphe orienté

IV 1 Problème 5

Problème 5 : L'entrepôt

Manuel page 37.

Objectif : résoudre un problème d'ordonnancement, et précisément utiliser un graphe orienté pour regrouper des tâches.

IV 2 Définition

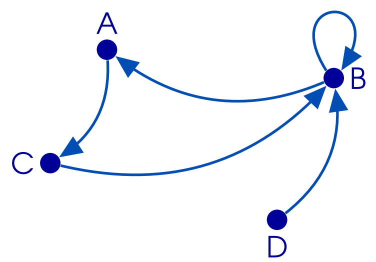
Définition

Un graphe est dit **orienté** lorsque ses arêtes ont un **sens de parcours**. Chaque arête a alors une **origine** et une **extrémité** et est représentée par une **flèche**.

Remarque :
Les définitions données précédemment pour un graphe non orienté (ordre, degré, ...) s'étendent aux graphes orientés avec toutefois des équivalences de mots de vocabulaire :

Graphe non orienté	Graphe orienté
arête	arc
chaîne	chemin
cycle	circuit

Exemple :



- A-C-B est un **chemin** de longueur 2.
- Le chemin D-B-C n'existe pas.
- D-B-A-C-B-A est un **chemin** de longueur 5.
- B-A-C-B-B est un **circuit** de longueur 4.

V Matrice d'adjacence d'un graphe simple

V 1 Problème 6

Problème 6 : Randonnée en haute montagne

Manuel page 46.

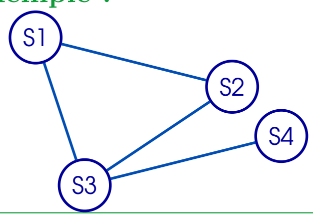
Objectif : construire une matrice adjacente d'un graphe simple et utiliser les puissance de cette matrice pour résoudre des problèmes de chemins de longueurs données.

V 2 Représentation matricielle d'un graphe

Définition pour un graphe simple *non orienté*

Soit n un entier naturel non nul et soit G un graphe simple **non orienté** d'ordre n.
On appelle **matrice associée à G**, ou **matrice d'adjacence de G**, la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n telle que :
- $a_{ij} = 1$ s'il existe une arête d'extrémités i et j.
- $a_{ij} = 0$ sinon.

Exemple :

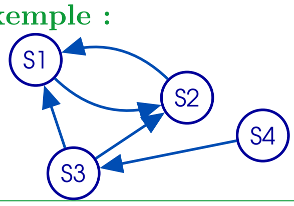


La matrice d'adjacence de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Définition pour un graphe simple *orienté*

Soit n un entier naturel non nul et soit G un graphe simple **orienté** d'ordre n.
On appelle **matrice associée à G**, ou **matrice d'adjacence de G**, la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n telle que :
- $a_{ij} = 1$ s'il existe un arc d'origine i et d'extrémité j.
- $a_{ij} = 0$ sinon.

Exemple :



La matrice d'adjacence de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

V 3 Propriétés

Propriété

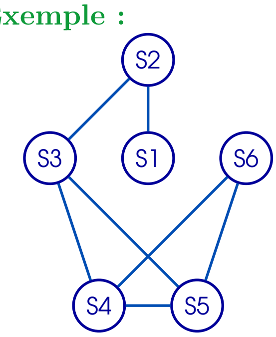
• La matrice d'adjacence d'un graphe **simple** ne présente **que des 0 et des 1** et sa diagonale ne comporte que des 0.
• La somme des coefficients de la i-ème ligne est égale au degré du i-ème sommet.
• Dans le cas d'un **graphe non orienté**, la matrice d'adjacence est **symétrique**.
• **Graphe non orienté :** la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au double du nombre d'arêtes du graphe.
• **Graphe orienté :** la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arcs du graphe.

V 4 Nombre de chaînes de longueur n d'un graphe

Propriété

Soit G un graphe, M sa matrice d'adjacence et n un entier naturel non nul.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice ij de la matrice M^n.

Exemple :



Soit G le graphe ci-contre. La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors déterminer, par un calcul ou à l'aide de la calculatrice, les matrices M^2, M^3 et M^4 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Ces matrices donnent respectivement le nombre de chaînes de longueurs 2, 3 et 4, joignant chaque somme du graphe à un autre sommet du graphe.