MATRICES

Chapitre 1

Table des matières

I Problème

Problème : utiliser des matrices dans un contexte économique :

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B. Ces produits sont fabriqués sur trois sites de production S1, S2 et S3.
En septembre 2015 :
- le site S1 a fabriqué 50 milliers d'articles A et 70 milliers d'articles B ;
- le site S2 a fabriqué 40 milliers d'articles A et 90 milliers d'articles B ;
- le site S3 a fabriqué 120 milliers d'articles B ;

I 1 Partie A : Notion de matrices

1. On peut représenter la production du mois de septembre à l'aide de la matrice P_0 définie ainsi :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

   (a) Que représente chaque ligne de cette matrice ?

   (b) Que représente chaque colonne de cette matrice ?

2. La production du mois d'octobre 2015 est donnée par la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.

   (a) Combien d'articles A a fabriqué le site S1 durant le mois d'octobre 2015 ?

   (b) Combien d'articles au total le site S2 a-t-il fabriqué durant le mois d'octobre 2015 ?

   (c) Combien d'articles au total ont été fabriqués durant le mois d'octobre 2015 ?

I 2 Partie B : Premières opérations sur les matrices

1. **Somme de matrices :**
   Déterminer la matrice T_1 représentant la production totale des mois de septembre et octobre pour chaque site.
2. **Produit d'une matrice par un réel :**
   En novembre 2015, pour faire face à la demande, la direction décide d'augmenter de 10% la production du mois d'octobre de chaque article, dans chaque site. Déterminer la matrice P_2 représentant la production de novembre 2015.

I 3 Partie C : Produit de deux matrices, 1$^{\text{ère}}$ partie

1. **Produit d'une matrice par une matrice colonne :**
   Le coût de la main d'œuvre est le même pour chaque article fabriqué, mais il diffère selon le site de production. Pour S1 le coût de la main d'œuvre est de 25 euros par unité ; pour S2, il est de 28 euros ; pour S3, il est de 30 euros.

   (a) Calculer le coût unitaire de la main d'œuvre, en octobre 2015, pour la fabrication des articles A.

   (b) Représenter le coût *unitaire* de la main d'œuvre par une matrice colonne C.

(c) En considérant les matrices P_1 et C, déterminer la matrice M_1 représentant le coût de la main d'œuvre pour la fabrication en octobre 2015 des articles A et des articles B.

2. **Produit d'une matrice ligne par une matrice :**
Le prix de la matière première nécessaire à la fabrication de chaque article est de 18 euros pour un article A et 22 euros pour un article B.
(a) Représenter le coût de la matière première par un vecteur-ligne L.
(b) En considérant les matrices L et P_1, déterminer la matrice A_1 représentant le montant des achats de matière première nécessaire à la fabrication des articles en octobre 2015 pour chacun des trois sites.

I 4 Partie D : Produit de deux matrices, $2^{\text{ème}}$ partie

20% des articles A et 40 % des articles B sont destinés à l'exportation.

1. Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

2. Donner une interprétation du produit :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II Notion de matrices et vocabulaire

II 1 Définition

Définition

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.
Une matrice est un tableau rectangulaire formé de m lignes et n colonnes de nombres.
Sa taille (ou sa dimension, ou encore son format) est noté $m \times n$.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1,8 \end{pmatrix}$ est une matrice de 2 lignes et de 3 colonnes, et donc de taille 2×3.

Remarque : une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée une matrice nulle.

II 2 Écriture générale d'une matrice

Définition

Une matrice A de taille $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ s'appellent les **coefficients** de la matrice.
On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n}$
Le coefficient a_{ij} est le nombre placé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Remarque : les coefficients a_{ij} peuvent parfois être notés $a_{i,j}$, notamment pour éviter les confusions dans le cas de grandes matrices (plus de 9 lignes ou de 9 colonnes).

II 3 Égalité de deux matrices

Propriété

On dit que deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.
Autrement dit, deux matrices A et B sont égales si et seulement elles sont de même taille $n \times m$ (n et m des entiers naturels non nuls) et si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a : $a_{ij} = b_{ij}$.

II 4 Quelques matrices particulières

II 4 a Matrice ligne, matrice colonne

Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une **matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne. Elle est de taille $1 \times n$.
Une **matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne. Elle est de taille $n \times 1$.

Exemples :

$\begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Remarque :
Les coordonnées des vecteurs sont parfois représentées sous forme de matrice colonne à deux lignes pour les vecteurs du plan, et à trois lignes pour les vecteurs de l'espace.

II 4 b Les matrices carrées

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice formée de n lignes et n colonnes.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & 2,7 \\ \frac{3}{4} & -2 & 1,4 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 3.

Définition : diagonale d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une matrice carrée d'ordre n, les coefficients a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn} forment la diagonale de la matrice.

Définition : matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients qui ne sont pas situés sur sa diagonale sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Définition : matrice identité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice identité (ou unité) d'ordre n, notée I_n, est la matrice carrée (et diagonale) d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.

Exemple :

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.

Définition : matrice nulle d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice nulle d'ordre n, notée O_n, est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

III Somme de deux matrices

Propriété

Soient A et B deux matrices **de même taille**. La somme de A et B est la matrice notée $A+B$ dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux les coefficients qui ont la même position dans A et B.

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $A+B = \begin{pmatrix} 0,2+5 & 3+1 & 0+4 \\ 1+2 & -2+4 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

IV Produit d'une matrice par un réel

IV 1 Matrice kA

Propriété

Soit A une matrice et k un nombre réel. Le produit de la matrice A par le nombre réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de la matrice A par le nombre k.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0,3 & 4 \end{pmatrix}$ et $k=3$. Alors $3A = \begin{pmatrix} 3\times(-1) & 3\times 2 \\ 3\times 0,3 & 3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0,9 & 12 \end{pmatrix}$

Remarque :

Les deux propriétés précédentes permettent de définir la différence de deux matrices :

$$A - B = A + (-1)B$$

IV 2 Propriétés de distributivité

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de même taille et soient k et k' deux réels. Alors on a :

(1) : $A+B = B+A$ (Commutativité de l'addition)

(2) : $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$ (Associativité de l'addition)

(3) : $k(A+B) = kA+kB$

(4) : $k+k')A = kA+k'A$

(5) : $k(k'A) = (kk')A = kk'A$

Exemple :
Soit A et B deux matrices de même taille. Posons M la matrice définie par : $M = 2(A+3B)-(A+5B)$.
Alors $M = 2A+6B-A-5B = A+B$.

V Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice colonne de taille $n \times 1$.

Alors $A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \dots + a_{1n} \times b_{n1}$

Exemple :

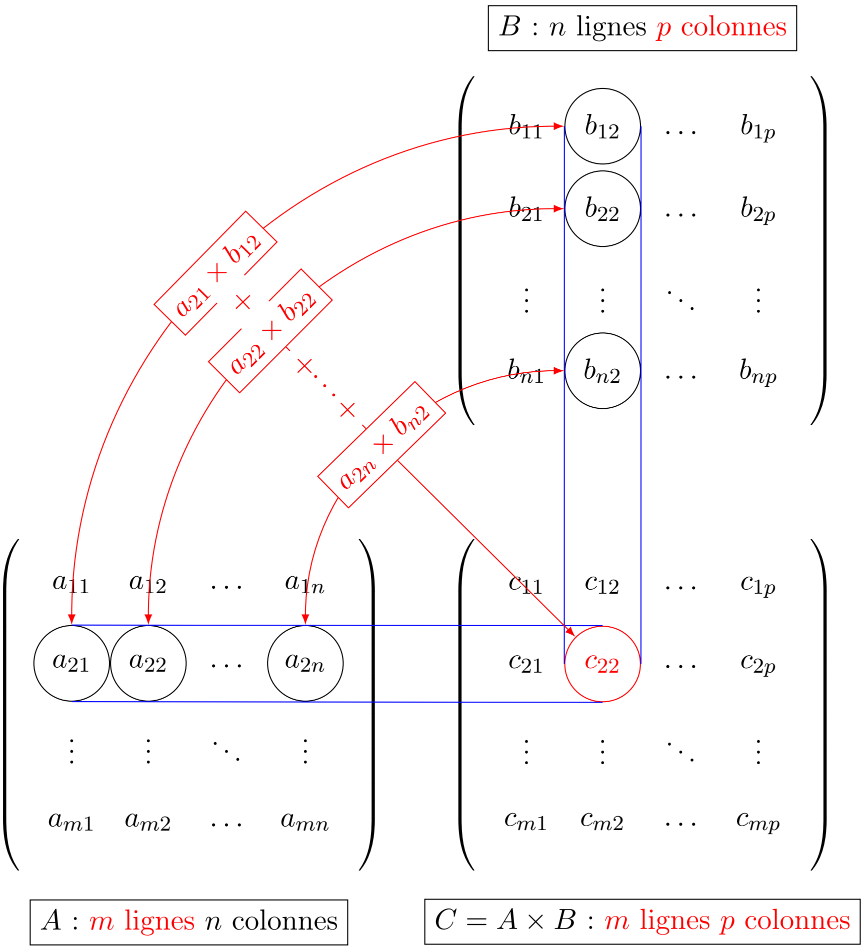
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times (-5) + 4 \times 3 = 7$$

VI Produit de deux matrices

VI 1 Produit A×B

Propriété

Soient m, n et p trois entiers naturels non nuls.
Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.
Le produit $A \times B$ ou AB est la matrice de taille $m \times p$ dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.



Exemple :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ & \times & \\ \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques importantes :

- Le produit $A \times B$ n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de colonnes de B.
- En général, le produit de deux matrices n'est pas commutatif : $A \times B \neq B \times A$.
- Si $AB = AC$, alors on ne peut PAS "simplifier" et en déduire que $B = C$.
- $A \times B = O$ ne signifie pas que $A = O$ ou $B = O$ (avec O matrice nulle).

VI 2 Propriétés

Propriétés

Soient A, B et C des matrices carrées d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. On note ce produit $A \times B \times C$ ou ABC.
- Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- Soit I_n la matrice unité d'ordre n. Alors $I_n \times A = A \times I_n = A$.

VI 3 Puissance entière d'une matrice carrée

Définition

Soit n un entier naturel non nul, soit A une matrice carrée d'ordre n et soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La matrice A^k est la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k \text{ fois}}$$

VII Matrice inverse et résolution de systèmes

VII 1 Définition de A^{-1}

Définition

Soit n un entier naturel non nul, et soit alors A une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n, notée A^{-1} telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
La matrice A^{-1} est alors unique et appelée **la matrice inverse** de A.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 01 & \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Remarques :

- En pratique, il suffit de montrer que $AB = I_n$ (ou bien que $BA = I_n$) pour montrer que B est la matrice inverse de A.

- La matrice nulle O_n d'ordre n n'est pas inversible, car pour toute matrice carrée A d'ordre n,

$$O_n \times A = O_n \neq I_n$$

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis exprimer A^2 en fonction de I_2.
2. En déduire que A est inversible et donner alors sa matrice inverse A^{-1}.

VII 2 Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d quatre réels.

Le réel $ad - bc$ est appelé le **déterminant** de la matrice A et est noté $\det(A)$.

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.
On a alors l'équivalence suivante :

$$\text{La matrice } A \text{ est } \textbf{inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Dans ce cas, on a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est alors $\det(A) = 3 \times 9 - 7 \times 5 = 27 - 35 = -8$.
$\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

Sa matrice inverse est alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

Remarques :

• Cette propriété peut être démontrée en vérifiant que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Le fait que A inversible $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ peut être mis en parallèle avec le critère de colinéarité de vecteurs.

VII 3 Lien avec la résolution de système

Le système $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ peut s'écrire $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Ainsi, résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues revient à résoudre une **équation matricielle** de la forme $A \times X = B$.

Supposons que A soit inversible. Alors :
$A \times X = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow I \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$.

D'où la propriété suivante :

Propriété

Soit A une matrice carrée inversible. Alors l'équation matricielle $AX = B$ a pour solution $X = A^{-1}B$.

Remarque :
Lorsque la matrice A n'est pas inversible, le système d'équations peut avoir une infinité de solutions, ou aucune solution.

Exemple :

On considère le système $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

1. Écrire le système ci-dessus sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$, en précisant les matrices A, B et X.
2. On admet que la matrice A est inversible.

   Démontrer que sa matrice inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.
3. En déduire la valeur de la matrice X puis les solutions du système d'équations.