Exercice 1 –

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez un commerçant.
On admet que X suit la loi normale de moyenne $27,5$ et d'écart-type 3.
On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 euros.
2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre 24,50 euros et 30,50 euros .

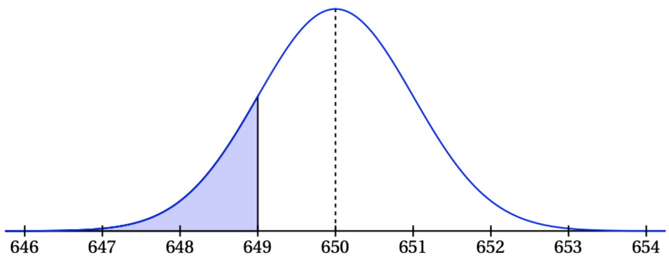
Exercice 2 –

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Quelle est la probabilité que le site internet vende entre 2100 et 2900 rubans LED d'intérieur en un mois ?
2. (a) Trouver, arrondie à l'entier, la valeur de a telle que $P(X \leqslant a) = 0,95$.
   (b) Interpréter la valeur de a obtenue ci-dessus en termes de probabilité de rupture de stock.

Exercice 3 –

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que $P(X \leqslant 649) \approx 0,1587$. On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de X.



Quelle affirmation est vraie ?

A. $P(X \leqslant 651) \approx 0,6587$	**B.** $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0,683$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

Exercice 4 –

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 2,4$.
L'arrondi au centième de $P(X \geqslant 12,5)$ est :

A. 0,58 **B.** 0,42 **C.** 0,54 **D.** 0,63

Exercice 5 –

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 30 et d'écart type σ. Alors :

a. $P(X = 30) = 0,5$ **b.** $P(X < 40 < 0,5)$

c. $P(X < 20) = P(X > 40)$ **d.** $P(X < 20) > P(X < 30)$

Exercice 6 –

Un navigateur décide de modéliser la durée de sa traversée en jour par une loi normale de paramètres $\mu = 7$ et $\sigma = 1$.

1. Quelle est la probabilité que le navigateur termine sa course entre 5 et 8 jours après le départ ?
2. Dans sa catégorie de voilier, le record du monde actuel est de 5 jours.
   Quelle est la probabilité que le navigateur batte le record du monde ?

Exercice 7 –

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = 3$.
La meilleure valeur approchée du réel t tel que $P(X > t) = 0,025$ est :

a. $t \approx 0,97$ **b.** $t \approx 19,12$ **c.** $t \approx 28$ **d.** $t \approx 30,88$

Exercice 8 –

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 12$.

1. Déterminer, en justifiant :

   a) $p(X = 10)$ b) $p(X \geqslant 45)$ c) $p(21 \leqslant X \leqslant 69)$ d) $p(21 \leqslant X \leqslant 45)$
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.
3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $P(X \leqslant a) = 0,30$.
   Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 9 –

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque employé en France, associe son temps de trajet quotidien, en minutes, entre son domicile et l'entreprise. Une enquête montre que X suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart type 10.

1. Calculer la probabilité que le trajet dure entre 20 minutes et 40 minutes.
2. Déterminer $P(X > 50)$.
3. À l'aide de la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée du nombre a à l'unité près, tel que $P(X > a) = 0,2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 10 –

Une société fabriquant des batteries pour véhicules électriques effectue une charge complète de chacune de ses batteries lors de la fabrication. Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de charge de ces batteries, exprimée en heures, par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne 6 et d'écart type σ.

1. Sachant qu'environ 95 % des durées de charge sont comprises entre 2,6 h et 9,4 h, justifier que l'on peut choisir $\sigma = 1,7$.
2. (a) Calculer $P(T > 7)$.

   (b) Sachant que l'une des batteries mise en charge n'est pas rechargée complètement au bout de 7 heures, quelle est la probabilité qu'elle ne le soit toujours pas au bout de 9 heures ?

Exercice 11 –

On considère la loi normale X de paramètres $\mu = 19$ et $\sigma = 5$.

1. La meilleure valeur approchée de $P(19 \leqslant X \leqslant 25)$ est :

   a. 0,385 **b.** 0,084 **c.** 0,885 **d.** 0,5
2. Une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geqslant 25)$ est :

   a. $p \approx 0,885$ **b.** $p \approx 0,115$ **c.** $p \approx 0,385$ **d.** $p \approx 0,501$
3. Le nombre entier k tel que $P(X > k) \approx 0,42$ à 10^{-2} près est :

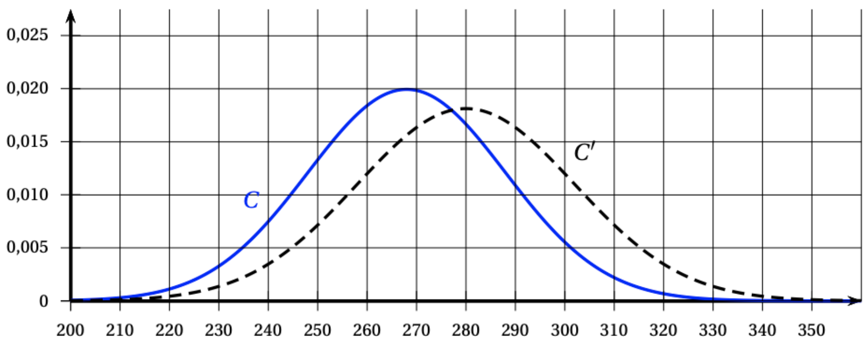
   a. $k = 19$ **b.** $k = 29$ **c.** $k = 20$ **d.** $k = 14$

Exercice 12 –

Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs gauchers est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 268$ et d'écart type $\sigma_1 = 20$.
Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs droitiers est modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 280$ et d'écart type $\sigma_2 = 22$.

1. (a) Déterminer $P(X \leqslant 300)$ et $P(Y \leqslant 300)$.

   (b) Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
2. Sur le graphique ci-dessous, les courbes C et C' représentent les fonctions de densité des variables aléatoires X et Y.
   Indiquer, pour chaque variable aléatoire X et Y, la courbe correspondante. Justifier.



Pour aller un peu plus loin...

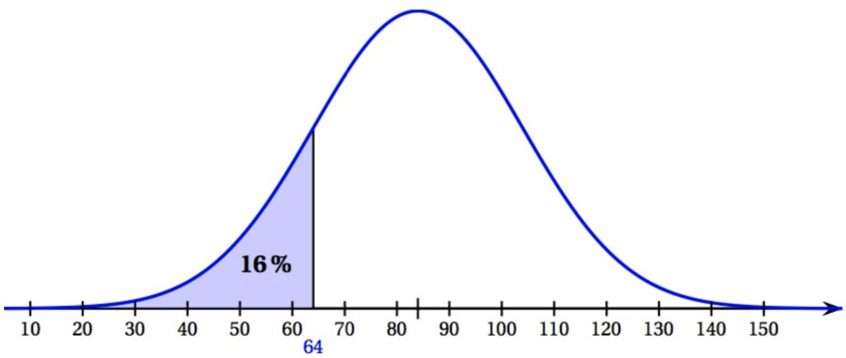
Exercice 13 –

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 20$ et qui vérifie $P(X \leqslant 25) = 0,85$.
On se propose de déterminer la valeur de l'écart-type σ de X.

1. Quelle est la loi suivie par $Z = \dfrac{X - 20}{\sigma}$?
2. Déterminer l'arrondi au centième du nombre réel u tel que $P(Z \leqslant u) = 0,85$.
3. En déduire une valeur approchée de σ.

Exercice 14 –

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,\sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous :



1. (a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   (b) Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
   (b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
   (c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3} près.

Exercice 15 –

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de qualité effectue un contrôle de la fabrication. Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes, avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins, pour être commercialisée. La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type σ.

Quelle doit être la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est commercialisée » soit égale à $0,97$?

Exercice 16 –

Lors d'un examen de Mathématiques en première année d'une école de commerce, noté sur 100, 10% des candidats ont obtenu une note supérieure à 70, et 15% une note inférieure à 35. On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X donnant la note d'un candidat par une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Quelle est la loi suivie par $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$?
2. Donner à l'aide de l'énoncé les valeurs de $P(X \geqslant 70)$ et $P(X \leqslant 35)$.
3. En déduire que $P(Z \geqslant \dfrac{70 - \mu}{\sigma}) = 0,1$ et $P(Z \leqslant \dfrac{35 - \mu}{\sigma}) = 0,15$.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer les arrondis au centième des réels a et b tel que $P(Z \geqslant a) = 0,1$ et $P(Z \leqslant b) = 0,15$.
5. En déduire un système de deux équations à deux inconnues μ et σ, et le résoudre.
6. Déterminer le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note supérieure ou égale à 50.