INTÉGRATION

Chapitre 5

Table des matières

I Intégrale d'une fonction continue et positive

I 1 Définitions

Unité d'aire

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ du plan, on appelle unité d'aire, notée u.a., l'aire du rectangle de côté OI et OJ. *(Faire une figure)*

Aire sous la courbe

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, avec a et b des réels tels que $a < b$, et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On appelle aire sous la courbe C l'aire, en u.a., du domaine délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. *(Faire une figure)*

Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ avec a et b des réels tels que $a < b$, et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f l'aire, en u.a., sous la courbe C sur $[a\,;b]$.

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (« intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou « somme... »)

Remarque et vocabulaire :

• Les réels a et b sont les bornes de l'intervalle.

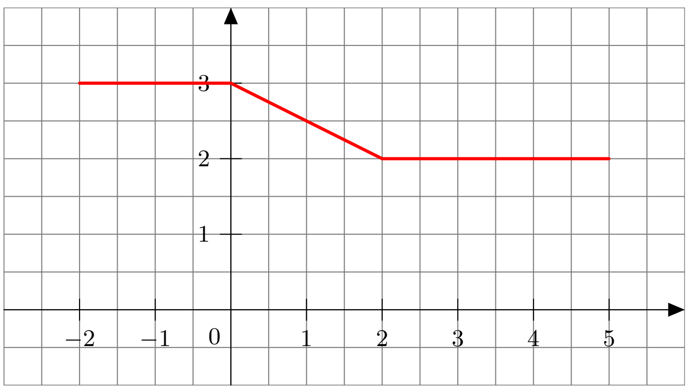
• La variable x est dite muette, car elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

• $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

I 2 Premiers calculs d'intégrales

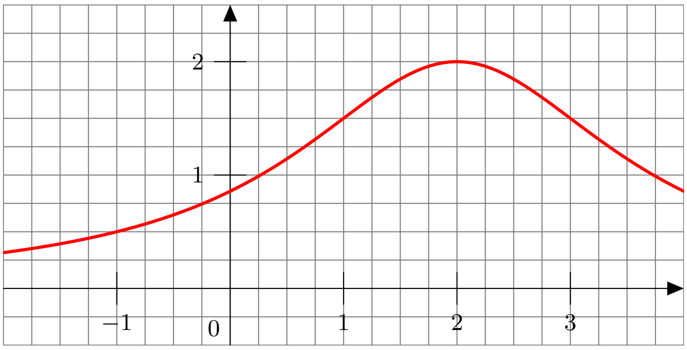
Ex 1 :

On a représenté la courbe de la fonction f sur $[-2\,;5]$. A l'aide du graphique, calculer $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

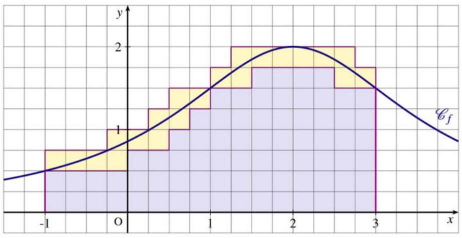


Ex 2 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6}{x^2-4x+7}$ dont la courbe C est représentée ci-dessous. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

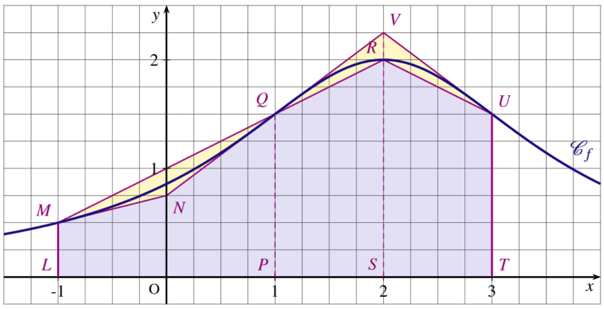


Correction :



Sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=3$.
On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement :

$$\frac{75}{16} \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6$$



Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites (MN), (NV) et (VU) étant les tangentes respectives à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 1 et 3.
L'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ est comprise entre la somme des aires des trapèzes $LMNO$, $NOPQ$, $PQRS$ et $RSTU$ et, la somme des aires des trapèzes $LMPQ$, $PQVS$ et $VSTU$. Soit

$$0,625+1,25+1,75+1,75 \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2+1,875++1,875$$

$$\iff 5,375 \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 5,75$$

Remarque :

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{6}{x^2-4x+7}\right)\mathrm{d}x \approx 5,44$ u.a.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{6}{x^2-4x+7}\right)\mathrm{d}x = \pi\sqrt{3}$ u.a.

Problématique :
Comment déterminer la valeur exacte d'une intégrale ?

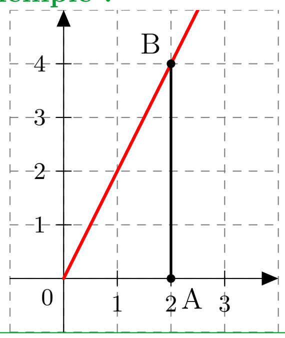
II Primitives

II 1 La fonction Aire

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle fonction Aire la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
F est dérivable sur $[a\,;b]$ et sa dérivée est la fonction f. *(Faire une figure)*

Exemple :



Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur $[0\,;4]$. f est continue et positive sur $[0\,;4]$.
$\forall x \in [0\,;4]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire, en u.a., du triangle rectangle OAB, avec $A(x\,;0)$ et $B(x\,;2x)$.

On a alors $F(x) = \dfrac{OA \times AB}{2} = \dfrac{x \times 2x}{2} = x^2$ et on a bien $F'(x) = 2x = f(x)$.

II 2 Primitive d'une fonction

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est une fonction dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple :

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto x + 3$.
(Réponse possible : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x$)

Remarque : La fonction G définie par $G(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ convient aussi. D'où la propriété suivante :

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout réel k, la fonction $F + k$ est aussi une primitive de f sur I

Démonstration :
La fonction $x \mapsto k$, avec $k \in \mathbb{R}$, a pour dérivée la fonction nulle.
Donc $(F + k)' = F' = f$.

Conséquence :
Si une fonction f admet une primitive sur un intervalle, alors elle en admet une infinité.

II 3 Primitive vérifiant une condition

Propriété

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque.
Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple :
Déterminer la primitive de $f : x \mapsto 5 - 2x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
($(F(x) = 5x - x^2 + k$, et $F(1) = 0 \Longleftrightarrow 5 - 1 + k = 0 \Longleftrightarrow k = -4$)

II 4 Calculs de primitives

II 4 a Fonctions continues et primitives

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

II 4 b Primitives des fonctions usuelles

On obtient le tableau suivant par « lecture inverse » du tableau des dérivées usuelles.

Fonction $f : x \mapsto \dots$	**Une primitive** $F : x \mapsto \dots$	**Sur l'intervalle** $I = \dots$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

II 4 c Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété

- Si F et G sont des primitives respectives sur un intervalle I de f et de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αF est une primitive de αf sur I.

Les primitives de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées.
Dans chaque cas, u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I.

Fonction f du type...	Une primitive F du type...	Conditions
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^n}$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$	Pour tout x de I, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	Pour tout x de I, $u(x) > 0$.
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout x de I, $u(x) > 0$.
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0,\ x \in J)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	Pour tout x de J, $ax+b \in I$ et U primitive de u sur I.

III Intégrales et primitives

III 1 Retour au calcul d'intégrale

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec a et b des réels et $a < b$.

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ égal à $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Remarque :
Dans le cas où f est continue et positive sur $[a\,;b]$, on retrouve la définition du I avec l'aire sous la courbe.

Exemple :

Calculer $A = \displaystyle\int_{-1}^{4} \left(\frac{1}{3}x - x^2\right)\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_3^5 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

III 2 Propriétés des intégrales

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

Linéarité

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Relation de Chasles

Pour tous réels c, d et e de l'intervalle $[a\,;b]$:

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés algébriques

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :
- évident, vu auparavant.
- Relation de Chasles.

Positivité

- Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Démonstration :
Ce résultat découle de la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

Ordre

Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :
$f(x) \leqslant g(x) \iff g(x) - f(x) \geqslant 0$ et on utilise la propriété précédente puis la linéarité de l'intégrale.

III 3 Aire délimitée par deux courbes

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et telles que pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire, en u.a., du domaine délimité par les courbes représentatives de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

(Faire une figure)

III 4 Valeur moyenne d'une fonction

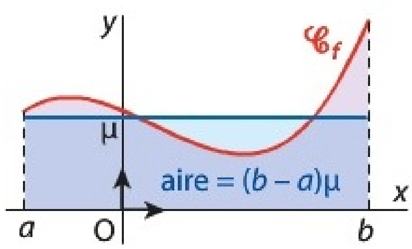
Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec a et b des réels et $a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive :

La valeur moyenne μ est telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mu$.
Ainsi, lorsque f est positive sur $[a;b]$, le nombre μ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a;b]$ et ayant la même aire que le domaine D située sous la courbe C_f.



Exemple :

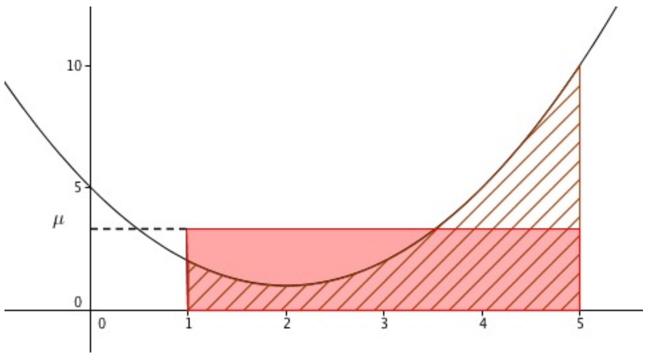
Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

1. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; 5]$.
2. Tracer C_f sur $[1; 5]$ et interpréter graphiquement.

Correction :

1. $\mu = \dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 (x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^5$.
   Donc $\mu = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{10}{3}$. Donc $\mu = \dfrac{10}{3}$.

2. $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ donc C_f est une parabole convexe de sommet $(2; 1)$:



L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle rouge.