CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ : exercices

Exercice 1 – Fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $[-5\,;5]$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[-5\,;5]$ puis dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 25$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[-5\,;5]$.
3. Déterminer à la calculatrice une valeur arrondie au centième près de α.

Exercice 2 – Étude d'une fonction à partir d'un tableau de variation

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$ dont voici le tableau de variations :

x	-3		2		5
f	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[2\,;5]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\,;2]$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

Exercice 3 – Continuité et TVI

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau de variations de f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

1. (a) La fonction f est-elle continue sur $]-3\,;+\infty[$?
   (b) Donner deux intervalles où f est continue mais non monotone.
   (c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. (a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une unique solution ?
3. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas le savoir :
   (a) $f'(-2) \times f'(0) \leqslant 0$.
   (b) $f'(-2) \times f'(3) \leqslant 0$.
   (c) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-3\,;5[$.
   (d) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5\,;+\infty[$.

Exercice 4 – Une fonction polynôme de degré 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et C sa courbe représentative.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout réel x, $f''(x) = 20x^2(x-3)$.
2. Dresser en justifiant le tableau de signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'existence d'un unique point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
4. Étudier enfin la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.