CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

Chapitre 4

Table des matières

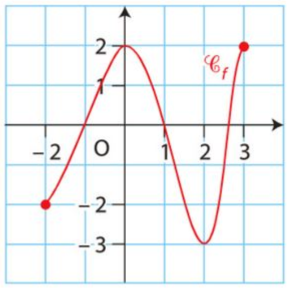
I Continuité

I 1 Continuité sur un intervalle

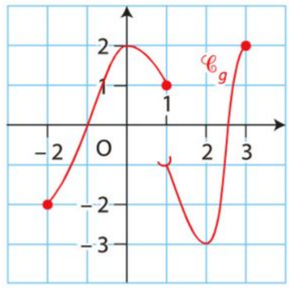
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe C sans lever le crayon.

Exemple



Contre-exemple



Remarque :
Dans un tableau de variations, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie.

I 2 Propriétés des fonctions dérivables

Propriété

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
Ainsi, dans la pratique, pour justifier qu'une fonction est continue sur I, il suffit de montrer qu'elle est dérivable sur I.

Remarque :
Attention, la réciproque de cette propriété est fausse.
Exemple avec la fonction racine carrée, continue sur $[0\,;+\infty[$ mais dérivable uniquement sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

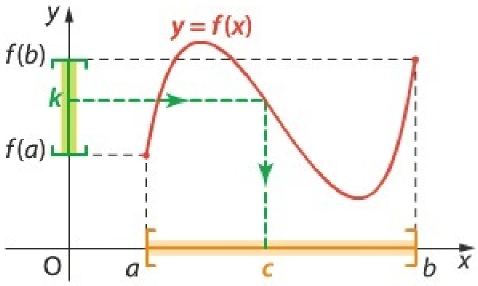
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction e^u est continue sur I.

II Théorème des valeurs intermédiaires

II 1 Enoncé du théorème

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, avec a et b des réels.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a;b]$.



Exemple 1 :

Montrer que l'équation $x^5 + 2x - 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto x^5 + 2x - 1$.
f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
Or $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ et 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$, et donc dans $\mathbb{R}$.

II 2 Le corollaire

Corollaire (admis)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il **existe un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple :

Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ su ?

Correction :

Faire une étude complète de $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	-26	↗	$+\infty$

II 3 Signe d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle$[a\,;b]$ avec a et b des réels et $a < b$.
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $k \in [a\,;b]$.

Remarque :

Cette propriété permet alors d'établir le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Par exemple, si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe un unique réel k entre a et b tel que $f(k) = 0$ et le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	a		k		b
$f(x)$		$-$	0	$+$	

De même, si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors il existe un unique réel k entre a et b tel que $f(k) = 0$ et le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	a		k		b
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercices :

Exercices 1, 2 et 3 du polycopié.

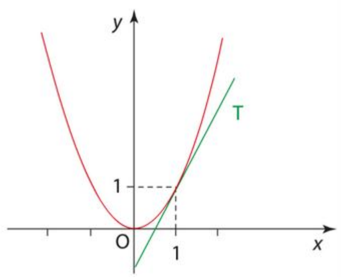
III Convexité

III 1 Fonctions convexes, fonctions concaves

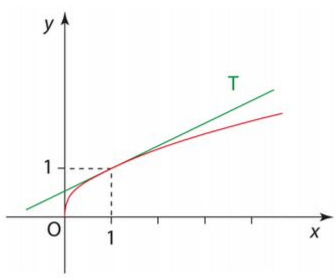
Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.
- Dire que f est convexe sur I signifie que, sur I, C est entièrement **au-dessus** de ses tangentes.
- Dire que f est concave sur I signifie que, sur I, C est entièrement **en-dessous** de ses tangentes.

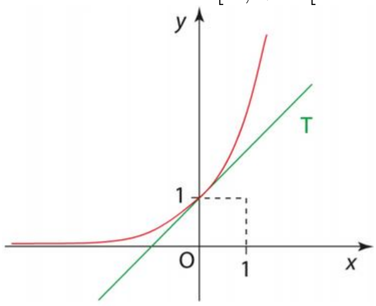
Fonction carrée :
convexe sur $\mathbb{R}$



Fonction exp :
convexe sur $\mathbb{R}$

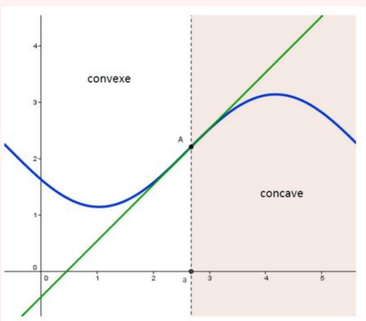


Fonction racine carrée :
concave sur $[0\,;+\infty[$



III 2 Point d'inflexion

Définition



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit a un réel de I.

Dire que le point $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de C signifie qu'au point A, la courbe C traverse la tangente en a.

Conséquence :
En l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f change de convexité.

III 3 Convexité et dérivées f' et f''

III 3 a Convexité et sens de variation de f'

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur I.
- f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur I.

Exemple :
$f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ et la fonction $f' : x \mapsto 2x$ est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

III 3 b Convexité et signe de f''

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est dérivable sur I.
La dérivée de f', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Exemple :
$f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
La fonction f' est dérivable également sur $\mathbb{R}$.
Donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 2$.

Conséquence :
On peut alors reformuler la propriété du III 3 a ainsi :

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur $I \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur $I \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \leqslant 0$.

III 4 Point d'inflexion et dérivée seconde

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.
Soit a un réel de I.
$A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $C \iff f''$ s'annule en a en changeant de signe.

Exemple :

$f : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
On dresse (immédiat) le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, le point $A(0\,;0)$ est un point d'inflexion de C.

Exercice :

Exercice 4 du polycopié.