FONCTION EXPONENTIELLE

Chapitre 3

Table des matières

I Fonction exponentielle de base q **2**
- I 1 Fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$ . . . 2
- I 2 Sens de variation . . . 2
- I 3 Relation fonctionnelle . . . 3

II La fonction exponentielle de base e **3**
- II 1 Définition . . . 3
- II 2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle . . . 4
- II 3 Signe de la fonction exponentielle . . . 4
- II 4 Sens de variation de la fonction exponentielle . . . 4
- II 5 Résolution d'équations et d'inéquations . . . 4
- II 6 Dérivée de la fonction exponentielle . . . 4
- II 7 Courbe représentative de la fonction exponentielle . . . 5
- II 8 Étude de fonction . . . 5

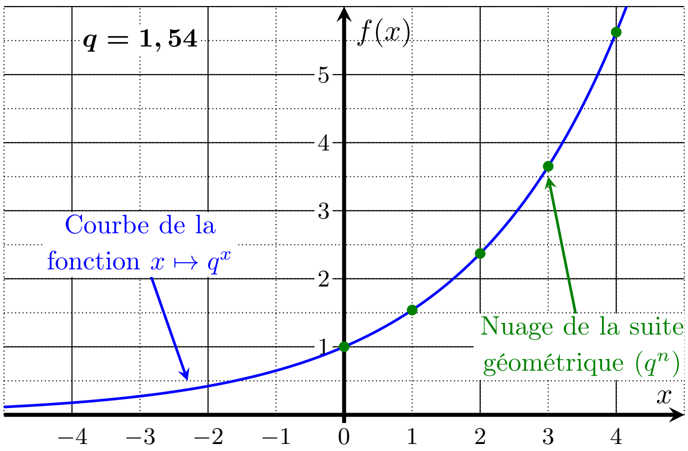
III Fonction de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ **6**
- III 1 Définition et propriété . . . 6
- III 2 Dérivée et sens de variation . . . 6
- III 3 Étude de fonctions . . . 6

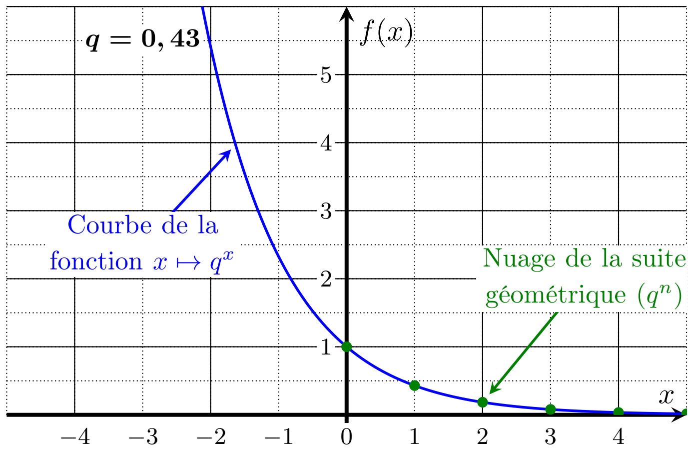
I Fonction exponentielle de base q

I 1 Fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

Définition

Soit q un réel strictement positif. Dans un repère, on considère le nuage de points représentatif de la suite géométrique (q^n).
La **fonction exponentielle de base q** est le prolongement de cette suite sur l'ensemble des réels.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$, avec $q > 0$.





Propriétés

- La fonction exponentielle de base q est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $q^x > 0$.

Exemple :

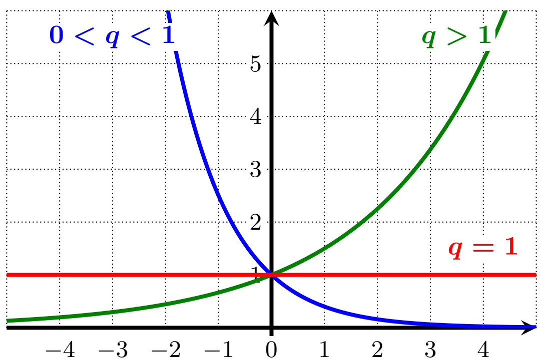
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,03^x$.

Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(0,14)$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

I 2 Sens de variation

Propriété

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$, avec q un réel strictement positif.
- Si $q > 1$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < q < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



I 3 Relation fonctionnelle

La fonction exponentielle de base q prolonge sur $\mathbb{R}$ les propriétés de calcul sur les puissances entières vues au collège :

Propriété

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$, avec q un réel strictement positif.
Alors pour tous réels x et y, on a :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

c'est-à-dire :

$$q^{x+y} = q^x \times q^y$$

Conséquences

Soit q un réel strictement positif.
(1) $q^0 = 1$ et $q^1 = q$.
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$ et $\dfrac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$.
(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(q^x)^n = q^{nx}$.

Définition

Soit q un réel strictement positif.
On appelle racine n-ième de q le réel positif u tel que $u^n = q$. On a alors $u = q^{\frac{1}{n}}$.

Exemples :

- Simplifier les écritures suivantes :

$\dfrac{x^7}{x^2}$; x^{-3} ; $\dfrac{(x^{-1})^4}{x}$; $3^x(1 + 2 \times 3^{-x})$; 3×3^x.

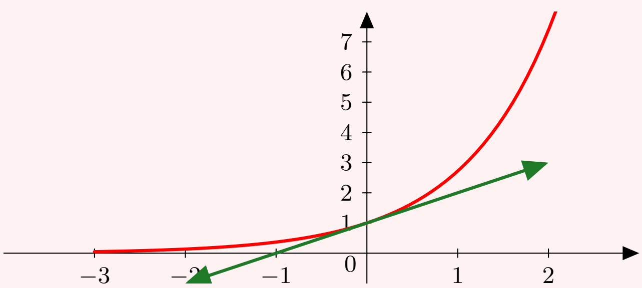
- Calculer la racine cubique de 2 à la calculatrice.

II La fonction exponentielle de base e

II 1 Définition

Définition et propriété

Il existe une unique fonction $f : x \mapsto q^x$, avec $q > 0$, qui admet pour nombre dérivé 1 en $x = 0$.



Par définition, le nombre e est l'image de 1 par cette fonction.
La calculatrice donne une valeur approchée de e : $\mathrm{e} \approx 2,718$.
Cette fonction est alors appelée la fonction exponentielle de base e (souvent simplifiée à « la fonction exponentielle ») et on la note exp.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp : x \mapsto \mathrm{e}^x\ \ ,\ \text{avec}\ \exp'(0) = 1$$

II 2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriétés

Les propriétés vues dans le II sur la fonction exponentielle de base q sont donc aussi valables pour la fonction exponentielle :

- $\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$; $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; $\exp(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$; $\exp(0,5) = \mathrm{e}^{0,5} = \sqrt{e}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$; $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $(e^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

II 3 Signe de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$

Remarque :
La démonstration est immédiate à l'aide de la propriété vue au II-1.

II 4 Sens de variation de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
D'après le II-2., comme $\mathrm{e} \approx 2,718$, on a $\mathrm{e} > 0$ donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II 5 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

- $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$
- $\mathrm{e}^y \leqslant e^y \iff x \leqslant y$

Remarque :
La démonstration est immédiate car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{x+3} = \mathrm{e}^2$ et $\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^5 \leqslant (\mathrm{e}^x)^4$.

II 6 Dérivée de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.
Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

II 7 Courbe représentative de la fonction exponentielle

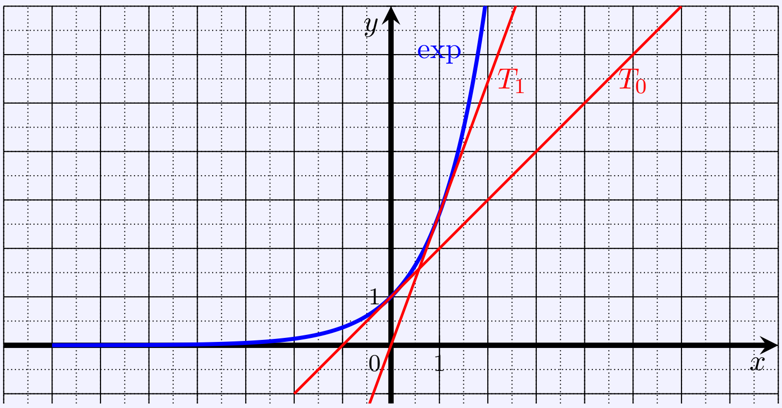
Tableau de variations détaillé de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$(\exp)'(x)$	$+$
exp	0 ↗ 1 ↗ e ↗ $+\infty$

Tracés de tangentes pour le tracé de la courbe de la fonction exp :

1. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 0. (*réponse* : $y = x + 1$).
2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 1. (*réponse* : $y = \mathrm{e}\,x$).

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



II 8 Étude de fonction

Ex 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$.

1. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^x$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Ex 2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

Ex 3 :

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Calculer $h'(x)$ et en déduire les variations de h.
3. Tracer l'allure de la courbe de la fonction h.

III Fonction de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$

III 1 Définition et propriété

Définition et propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u est la fonction définie sur I par $\mathrm{e}^u : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est de la forme e^u, avec $u(x) = x - 4$.

III 2 Dérivée et sens de variation

Théorème

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, avec u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors f est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.
(Notation : $(e^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$)

Exemple :

Dériver les fonctions suivantes :
$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$; $g : x \mapsto \mathrm{e}^{3x-4}$; $h : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-1}$

Théorème

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ a le même sens de variation que la fonction u.

Démonstration :
$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ et $e^u > 0$ donc le signe de $(e^u)'$ est celui de u', donc les variations de e^u sont celles de u.

III 3 Étude de fonctions

Ex 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.

Ex 2 :

Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x + 1$.