PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Chapitre 2

Table des matières

I Activité d'approche

Une société emploie 40% de cadres.
55% des cadres et 30% des non-cadres sont des femmes.
Dans la base de données des employés, on tire au hasard le nom de l'un des employés.
On note C l'événement « l'employé est cadre » et F l'événement « l'employé est une femme ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré. (*introduction aux probabilités conditionnelles*)
2. Calculer la probabilité que l'employé soit une femme cadre. (*introduction à la probabilité d'une intersection*)
3. Calculer la probabilité que l'employé soit une femme. (*introduction aux probabilités totales*)

II Probabilités conditionnelles

II 1 Probabilité de A sachant B

Définition

Soient A et B deux événements relatifs à un univers Ω, B étant de probabilité non nulle.
La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est le nombre réel noté $P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple :

Dans l'activité précédente, « 55% des cadres sont des femmes » se note $P_C(F) = 0,55$.

II 2 Probabilité de l'intersection $A \cap B$

Propriété

Soient A et B deux événements relatifs à un univers Ω et de probabilités non nulles.
Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$
(*Faire un arbre à chaque fois*)

Exemple :

Dans l'activité précédente, la probabilité de l'événement « l'employé est une femme cadre » se note $P(C \cap F)$. On a alors $P(C \cap F) = P(C) \times P_C(F) = 0,4 \times 0,55 = 0,22$.

III Probabilités totales

III 1 Partition de l'univers

Définition

Soit Ω un univers et soient A_1, A_2, ..., A_n n événements de probabilités non nulles, **deux à deux incompatibles**, et tels que leur réunion est Ω.
Autrement dit :
• Pour tout couple d'entiers i et j compris entre 1 et n et tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
• $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$
On dit alors que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition de l'univers** Ω.
(*Faire un schéma*)

III 2 Formule des probabilités totales

Propriété

On reprend les données de la définition précédente.
Soit également E un événement relatif à cet univers.
Alors la formule des probabilités totales s'écrit :

$$P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + ... + P(E \cap A_n)$$

(*Faire un schéma*)

IV Exercice bilan à rédiger

Une grande entreprise vient de clôturer une campagne de recrutement qui s'est déroulée en 2 temps :
– étude du dossier présenté par le candidat.
– entretien en vue du recrutement.

A l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :
• 30% des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
• 20% des candidats qui n'avaient pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
• 65% des candidats qui avaient un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés.

On choisit au hasard un candidat.

On note B l'événement « Le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » et R l'événement « Le candidat est recruté ».

Les résultats seront arrondis si besoin au millième.

1. Étude d'un candidat :
   (a) Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Calculer la probabilité que le candidat ait un mauvais dossier et ne soit pas recruté.
   (c) Calculer la probabilité que le candidat soit recruté.
   (d) Calculer la probabilité que le candidat ait un bon dossier sachant qu'il a été recruté.
2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres.
   On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes recrutées parmi ces 10 personnes.
   (a) Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,335$.
   (b) Calculer la probabilité que 5 des 10 personnes soient recrutées.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins une des 10 personnes soit recrutée.