SUITES

Chapitre 1

Table des matières

I Suites géométriques

I 1 Quelques petits rappels de 1ère...

I 1 a Définition et propriété

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit que u est une suite géométrique de raison q si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :
Soit u la suite géométrique de raison 5 définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 2$.
Alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n$. Calculer les premiers termes.

Propriété

Soit u une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$.
Alors pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple :
- Soit u la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 5$. Calculer u_{11}.
- Soit v la suite géométrique de raison $q = 3$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $v_1 = 2$. Calculer v_7.

I 1 b Reconnaître une suite géométrique

Propriété

Soit u une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.
Si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$, alors u est une suite géométrique de raison q.

I 1 c Sens de variations de la suite (q^n)

Propriété

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$, où q est un réel **strictement positif**.
- Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors u est constante.
- Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

Remarque :
Les suites géométriques de raison $q > 0$ correspondent à des évolutions dites **exponentielles**.

I 2 Somme $1+q+q^2+...+q^n$

Propriété

Soit q un nombre réel.
• Si $q=1$, alors $1+q+q^2+q^3+...+q^n=n+1$.
• Si $q\neq 1$, $1+q+q^2+q^3+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration :

• **Cas où $q=1$:**
On a alors $1+q+q^2+...+q^n=1+1+1+...+1=n+1$.

• **Cas où $q\neq 1$:**
Soit $S=1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n$.
Alors $qS=q+q^2+q^3+...+q^n+q^{n+1}$
Donc par différence de ces deux égalités, on obtient :
$S-Sq=1-q^{n+1}$, donc $(1-q)S=1-q^{n+1}$.
Et comme $q\neq 1$, on a bien $S=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemple :

Calculer pour tout entier naturel n la somme $1+2+2^2+...+2^n$.

II LIMITE DE LA SUITE (q^n) AVEC $q>0$

II 1 Conjectures au tableur

1. Tabuler sur la calculatrice les 30 premiers termes des suites suivantes :
   (a) $u_n=1,07^n$
   (b) $v_n=3,14^n$
   (c) $w_n=3,14^{n-1}$
   (d) $z_n=0,86^n$
   (e) $t_n=0,43^n$
2. Conjecturer le comportement de chaque suite quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

II 2 Propriété

Propriété

Soit q un nombre réel **strictement positif**.
• Si $q>1$, alors la limite de q^n est $+\infty$.
• Si $0<q<1$, alors la limite de q^n est 0.

Remarques :
• Lorsque l'on parle de la limite d'une suite, on sous-entend que c'est lorsque n tend vers $+\infty$.
• Si $q=1$, alors pour tout entier naturel n, $q^n=1$, et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

Notation :
La phrase « la suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$ » se note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$, avec ℓ un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Vocabulaire :

Soit (u_n) une suite.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, avec ℓ un nombre réel, alors on dit que la suite (u_n) converge vers ℓ.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $-\infty$), alors on dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- Si la suite (u_n) n'admet pas de limite, on dit que la suite (u_n) diverge. (Exemple : $u_n = (-1)^n$.

Exemple :

Soit pour tout entier naturel n, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

III Suite arithmético-géométrique

Définition

Soient a et b deux réels.

Une suite arithmético-géométrique est une suite u définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou quelques fois u_1) et par une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Remarque :

- Si $a = 0$, alors la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison a.