Terminale Spé Maths – Chapitre G-02

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

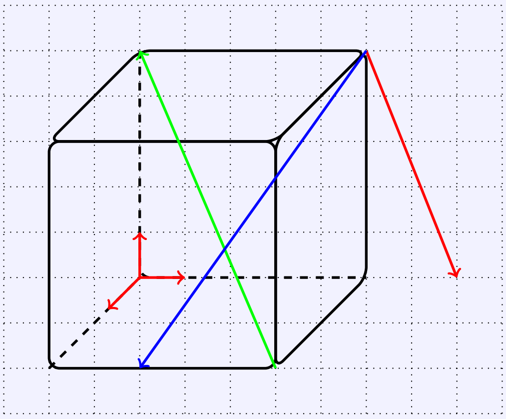


Table des matières

I Norme d'un vecteur de l'espace

1) Définitions

DÉFINITION

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace, et soient A et B deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la distance AB et on note : $||\overrightarrow{u}|| = AB$.

DÉFINITION

Un repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit **orthonormé** si, en posant $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$, on a :
- (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux.
- $||\overrightarrow{\imath}|| = ||\overrightarrow{\jmath}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$.

2) Norme et distance

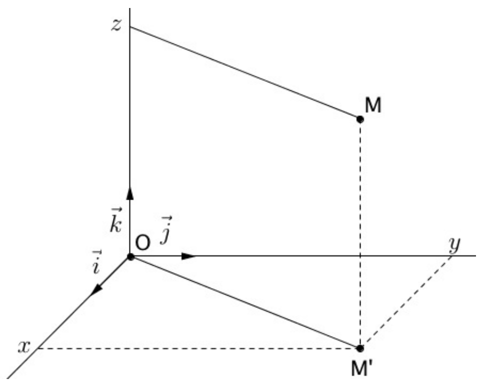
THÉORÈME

Soit $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ un vecteur de l'espace dans un repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **orthonormé**.
Alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

REMARQUE

Cette propriété n'est vraie que dans un repère **orthonormé** !!

DÉMONSTRATION



Soit $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ un vecteur de l'espace.
On pose M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ $(= x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k})$.
Soit M' le projeté orthogonal de M sur $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Alors $OM'M$ est rectangle en M'.
Donc $OM^2 = OM'^2 + M'M^2 = (x^2 + y^2) + z^2$. D'où le résultat.

PROPRIÉTÉ

Conséquence : distance entre deux points :
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace dans un repère orthonormé.
Alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

II Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

1) Définition

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Dans l'espace, une unité de longueur étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel** noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

REMARQUES

1) Cette expression est appelée la « formule de polarisation ».
2) On a aussi $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.
3) Les expressions du produit scalaire établies dans le plan sont encore valables dans l'espace :
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. (Et ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.)
- Si dans un plan P, H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

2) Expression analytique

THÉORÈME

Soit $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère **orthonormé** et $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace.
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

DÉMONSTRATION

$\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2$.
Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-x^2-y^2-z^2-x'^2-y'^2-z'^2\right) = \ldots = xx'+yy'+zz'$

3) Propriétés du produit scalaire

a Symétrie

PROPRIÉTÉ admise

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

b Bilinéarité

PROPRIÉTÉ admise

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de l'espace et λ un réel.
Alors $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

REMARQUE

Ces deux propriétés peuvent être démontrées rapidement à l'aide de l'expression analytique, dans le cadre d'un repère orthonormé.

III Vecteurs et orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux vecteurs

DÉFINITION

Deux vecteurs sont orthogonaux si l'un des deux est nul ou si deux droites dont ils sont vecteurs directeurs sont perpendiculaires.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

DÉMONSTRATION

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
D'où :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k \times \pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

2) Orthogonalité de deux droites

DÉFINITION

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

DÉFINITION

Deux droites de l'espace sont dites **perpendiculaires** si et seulement si elles sont **orthogonales** et **coplanaires**.

REMARQUE

Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse : par exemple, si on considère un cube ABCDEFGH, les droites (AB) et (FG) sont orthogonales mais non perpendiculaires. (*Faire une figure*)

3) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

DÉFINITION

Une droite est **orthogonale à un plan** si et seulement si tout vecteur directeur de cette droite est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de ce plan.

Autrement dit, si d est une droite de l'espace, de vecteur directeur $\vec{u}$ et si P est un plan de base $(\vec{v}, \vec{w})$, alors d est orthogonale à P si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$ **et** $\vec{u} \perp \vec{w}$.

Conséquence :
Les vecteurs directeurs d'une droite étant colinéaires, pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de montrer que **l'un de ses** vecteurs directeurs est orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** dirigeant le plan.

PROPRIÉTÉ

Soit Δ une droite et P un plan de l'espace.
Δ est orthogonale à toute droite du plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites **sécantes** de ce plan.

DÉMONSTRATION

Soit d et d' deux droites sécantes du plan P telles que $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$.
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ des vecteurs directeurs de Δ, d et d'. Ainsi $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v'}$.
De plus, d et d' étant sécantes, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ est un couple de vecteurs non colinéaires de P.
Soit alors D une droite quelconque de P, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
$\overrightarrow{w}$ est un vecteur de P donc il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v'}$.
Donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = a(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + b(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v'}) = a \times 0 + b \times 0 = 0$ (car $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v'}$)
Donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$ donc $\Delta \perp D$.

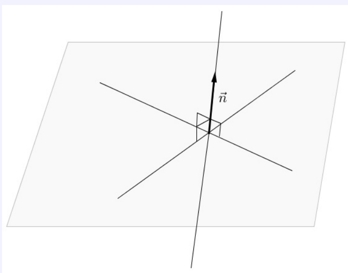
IV Vecteur normal à un plan ; équation cartésienne du plan

1) Vecteur normal à un plan

a Définition

DÉFINITION

Soit P un plan.
On appelle **vecteur normal à** P tout vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ d'une droite orthogonale à P.

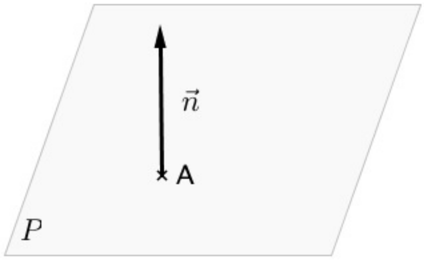


REMARQUES

- Un vecteur normal à P est non nul.
- Les vecteurs normaux à P sont colinéaires.
- Toute droite incluse dans P a ses vecteurs directeurs orthogonaux aux vecteurs normaux de P.

b Caractérisation d'un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de P.
$M \in P \Leftrightarrow A = M$ ou $(AM) \subset P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



PROPRIÉTÉ admise

Conséquence : l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2) Équation cartésienne d'un plan

Dans toute cette partie, l'espace est muni d'un repère **orthonormé**.

PROPRIÉTÉ

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$, avec a, b et c des réels non tous nuls.
Alors une équation cartésienne du plan P est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Soit P le plan passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$, de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.
Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
$M \in P \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ (car le repère est **orthonormé**)
$M \in P \Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$.
$M \in P \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$, en posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

PROPRIÉTÉ

Soit P un plan ayant pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal à P.

DÉMONSTRATION

Soit E l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$.
Les réels a, b et c sont non tous nuls ; supposons donc que $a\neq 0$.
Le point $A\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ est un point de E.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz=ax+by+cz+d.$
Ainsi, $M\in E$ équivaut à $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.
Donc E est le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

EXEMPLES

- Le plan P d'équation cartésienne $2x+y-5=0$ passe par $A(0;5;0)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(2;-1;0)$.
- Soit $A(1;-3;2)$ et $\vec{n}(-1;1;4)$, et soit P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
  1. Déterminer une équation cartésienne de P.
  2. Montrer que $B(3;1;0)\notin P$.
  3. Déterminer l'équation cartésienne du plan P' passant par B et parallèle à P.

3) Plan médiateur d'un segment

DÉFINITION

Soient A et B deux points de l'espace.
On appelle **plan médiateur** du segment $[AB]$ l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.

PROPRIÉTÉ — admise

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Le plan médiateur du segment $[AB]$ passe par le milieu du segment $[AB]$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

4) Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite et à un plan

a Distance d'un point à une droite

DÉFINITIONS

Soient A un point et d une droite de l'espace.

- La **distance** du point A à la droite d est la **plus petite longueur** AM, où M $\in d$.

- On appelle **projeté orthogonal** du point A sur la droite d l'unique point H intersection de la droite d et du plan P orthogonal à d et passant par A.

PROPRIÉTÉ admise

Soient A un point et d une droite de l'espace.

Le **projeté orthogonal** H du point A sur la droite d est le point de d le plus proche de A.
Autrement dit, la distance du point A à la droite d est la longueur AH.

b Distance d'un point à un plan

DÉFINITIONS

Soient A un point et P un plan de l'espace.

• La **distance** du point A au plan P est la **plus petite longueur** AM, où M $\in P$.

• On appelle **projeté orthogonal** du point A sur le plan P l'unique point H intersection du plan P et de la droite orthogonale à P et passant par A.

PROPRIÉTÉ

Soient A un point et P un plan de l'espace.

Le **projeté orthogonal** H du point A sur le plan P est le point de P le plus proche de A.
Autrement dit, la distance du point A au plan P est la longueur AH.

DÉMONSTRATION

Soit P un plan et A un point. On note H le projeté orthogonal de A sur P.

• **1$^{\text{er}}$ cas :** $A \in P$.
Alors H est confondu avec A et $AH = 0$.
Alors pour tout point M de P distinct de A, on a $MA \neq 0$, soit $MA > 0$, soit $MA > AH$. Donc H est le point de P le plus proche de A.

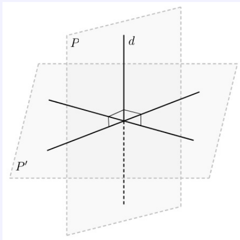
• **2$^{\text{ème}}$ cas :** $A \notin P$.
Pour tout point M de P distinct de H, le vecteur $\overrightarrow{HA}$ est un vecteur normal au plan P, et le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est un vecteur de la direction de P. Ainsi, $\overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{HA}$, donc le triangle MHA est rectangle en H. Son hypoténuse est $[MA]$ qui par définition a une longueur plus grande que celles des deux autres côtés du triangle. En particulier, on a donc $MA > AH$. Donc H est le point de P le plus proche de A.

5) Plans perpendiculaires

a Définition

DÉFINITION

On dit que deux plans sont perpendiculaires si un des plans contient une droite orthogonale à l'autre.



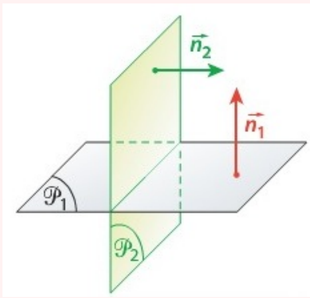
REMARQUE

Toute droite de l'un n'est pas orthogonale à toute droite de l'autre ! (Ex : la droite d'intersection)

b Caractérisation

PROPRIÉTÉ admise

Soit P et P' deux plans ayant pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
Alors P et P' sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.



6) Équation cartésienne d'une sphère

PROPRIÉTÉ

Soit I un point de l'espace muni d'un repère othonormé, et soit r un réel positif.
La sphère $\mathscr{S}$ de centre I et de rayon r a pour équation cartésienne :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = r^2$$

DÉMONSTRATION

$M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S} \iff IM = r \iff IM^2 = r^2 \iff (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = r^2$

REMARQUES

- Cette équation cartésienne n'est valable que dans un repère orthonormé (car utilisation de la formule de la norme).
- Si $r = 0$, la sphère est réduite en un point (son centre).