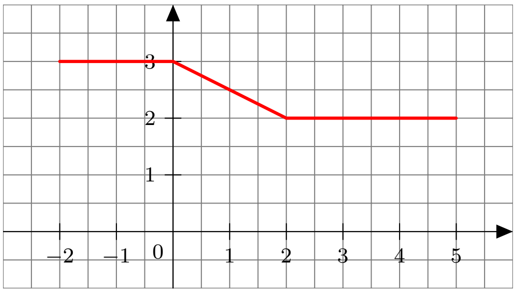
Exercice 1 – Lire une aire sous une courbe

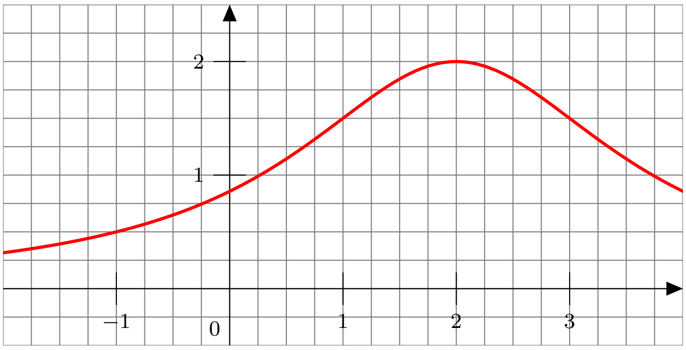
On a représenté la courbe de la fonction f sur $[-2\,;5]$. A l'aide du graphique, calculer $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Exercice 2 – Encadrer une aire sous une courbe

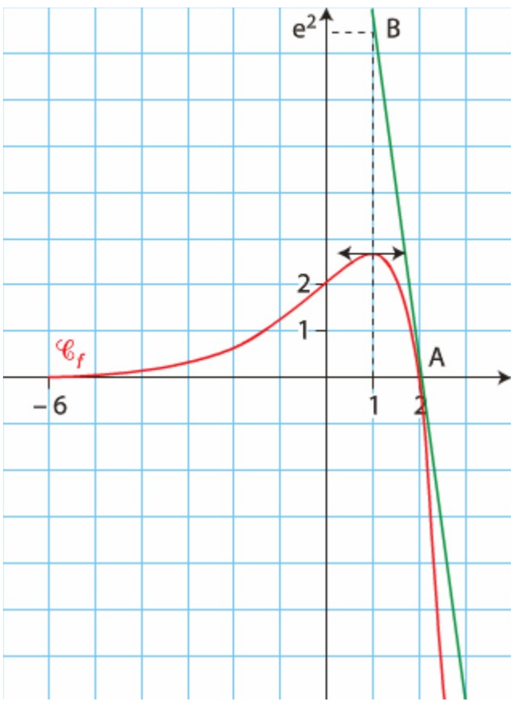
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6}{x^2-4x+7}$ dont la courbe C est représentée ci-dessous.

Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Exercice 3 – Vrai ou Faux

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-6\,;2,5]$.
On note f' sa fonction dérivée et F la primitive de f qui vérifie $F(1) = 2\,\mathrm{e}$.
Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.



1) Pour tout réel x de $[-6\,;2]$, $f'(x) \geqslant 0$.

2) $f'(2) = \mathrm{e}^2$.

3) La fonction F présente un maximum en 2.

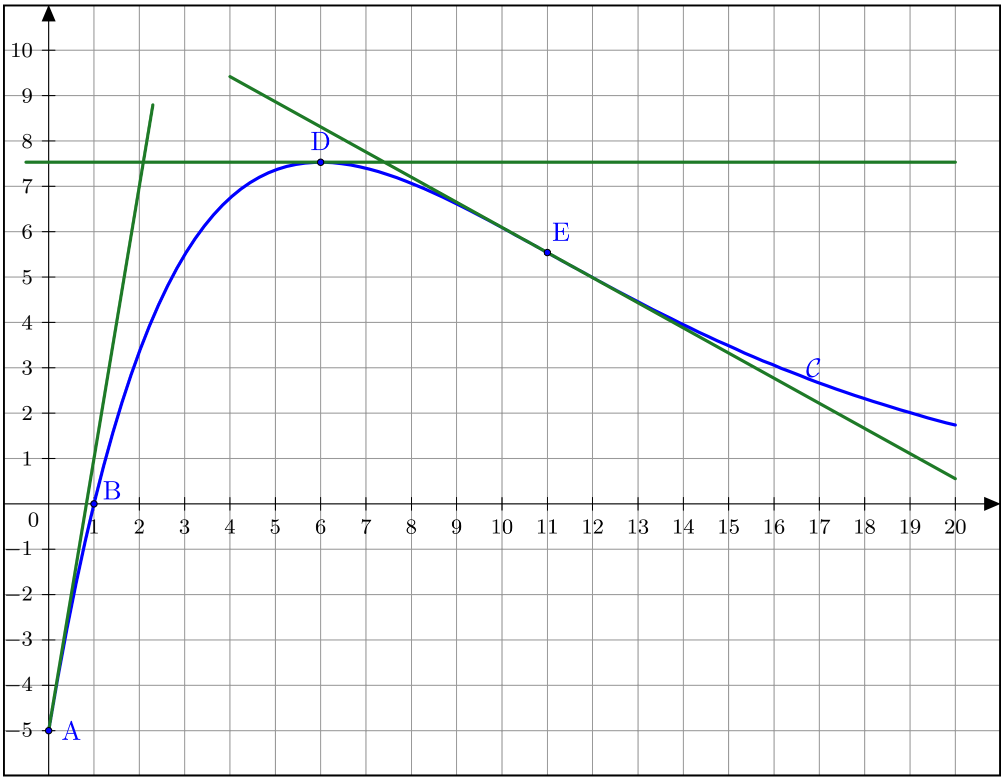
4) $\displaystyle\int_{0}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

5) On donne $F(-3) = \dfrac{6}{\mathrm{e}^3}$.
Alors l'aire sous la courbe de f sur $[-3\,;1]$ est, en unités d'aire, $(2\,\mathrm{e}^4 - 6)\,\mathrm{e}^{-3}$.

Exercice 4 – Exercice de type-bac

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Par lecture graphique (justifier les réponses) :

1) Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2) Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
3) Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = (5x-5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0\,;20]$, $f'(x) = (-x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
2) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,20]$.
   b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α.
4) a) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,20]$ par $F(x) = (-25x-100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,20]$.
   b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,8]$. Donner sa valeur exacte.

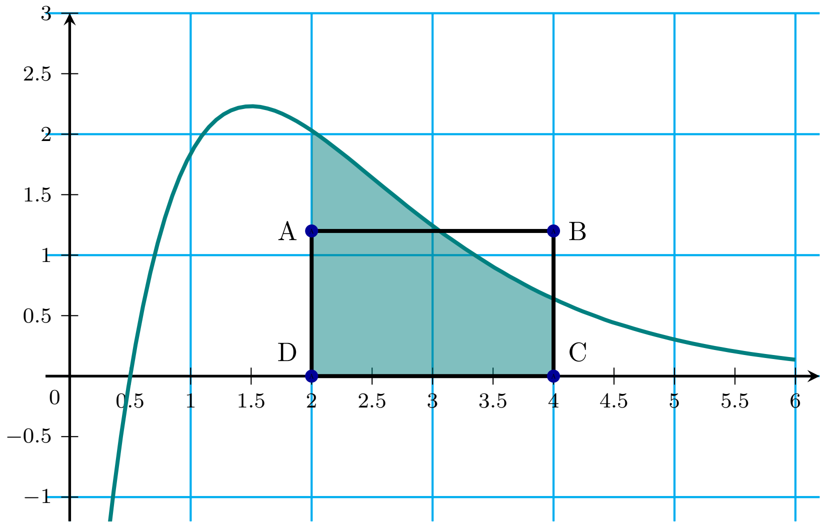
Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;\,20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\,20]$ dont la valeur arrondie au millième est $13,903$.

1) Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 euros ? (Arrondir à l'unité).
2) L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.
   Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Exercice 5 – Un autre exercice de bac

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
ABCD est un rectangle, le point D a pour coordonnées $(2\,;\,0)$ et le point C a pour coordonnées $(4\,;\,0)$.



Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données à partir d'une lecture graphique.

1) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

2) Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

3) Quel semble être le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2\,;\,6]$? Justifier.

4) Pour quelle(s) raison(s) peut-on penser que la courbe admet un point d'inflexion ?

5) Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par

$$f(x) = (10x - 5)\mathrm{e}^{-x}.$$

Un logiciel de calcul formel a donné les résultats suivants :

$$f'(x) = (-10x + 15)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (10x - 25)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

1) Justifier les résultats obtenus pour les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extremum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

3) Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

4) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par

$$F(x) = (-10x - 5)\mathrm{e}^{-x}$$

est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

5) En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

6) On souhaiterait que l'aire du rectangle ABCD soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure. Déterminer, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle.

Exercice 6 – Un dernier…

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) **a)** Démontrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

2) En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

3) On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

4) Interpréter graphiquement ce résultat.