Terminale Spé Maths – Chapitre A-09

CALCUL INTÉGRAL

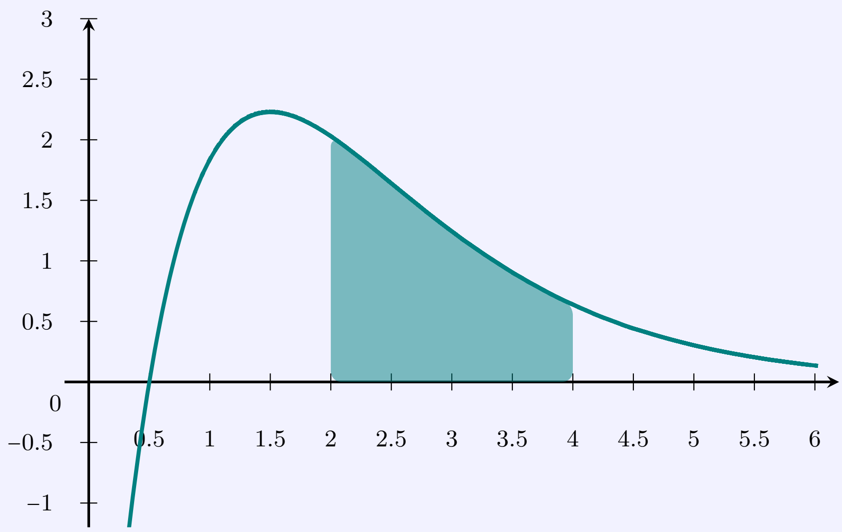


Table des matières

I Définition de l'intégrale d'une fonction

1) Cas d'une fonction continue positive sur $[a;b]$

a) Aire sous la courbe

DÉFINITION

Dans un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ du plan, on appelle unité d'aire, notée u.a., l'aire du rectangle de côtéq [OI] et [OJ]. *(Faire une figure)*

DÉFINITION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, avec a et b des réels tels que $a < b$, et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On appelle **aire sous la courbe** C sur $[a\,;b]$ l'aire, en u.a., du domaine délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Cette aire est appelée intégrale de a à b de la fonction f sur $[a\,;b]$.
On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (« intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou « somme... »)

REMARQUE

- La variable x est dite muette, car elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

b) Premiers calculs d'intégrales

faire une figure à chaque fois) :

- Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x$ $\quad (= 4 \times \dfrac{3}{2} = 6)$
- Calculer $J = \displaystyle\int_{1}^{3} t\,\mathrm{d}t$ $\quad (= 4)$
- Calculer $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad (= \dfrac{\pi}{2})$

c) Un exemple plus complexe

Comment calculer $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$?

Partageons l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. Plus n sera grand, plus la précision sera bonne.
Alors l'aire sous la courbe de la fonction exp entre 0 et 1, $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, est encadrée par deux sommes de rectangles telles que : $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant M_1 + M_2 + \ldots + M_n$.

On a $m_1 = \frac{1}{n}$, $m_2 = \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, $m_3 = \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$, ..., $m_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}$

Et $M_1 = m_2$, $M_2 = m_3$, ..., $M_{n-1} = m_n$ et $M_n = \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^1$.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\mathrm{e}^1$$

$$\text{donc } \frac{1}{n}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \times \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{donc } \boxed{(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{N\to 0} \frac{e^N - 1}{N - 0} = \exp'(0) = 1$, donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-1} = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} = \mathrm{e}-1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$ donc on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} = \mathrm{e}-1$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$. Mais $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ne dépendant pas de n, alors on peut en conclure que $\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1}$

d) Dérivabilité d'une fonction aire

DÉFINITION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **fonction Aire** la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. *(Faire une figure)*

REMARQUE

En particulier, $F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

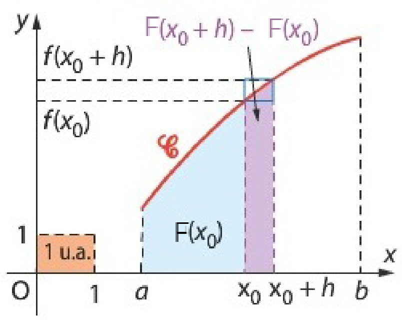
THÉORÈME

La fonction F définie ci-dessus est dérivable sur $[a\,;b]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
Autrement dit, la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$.

DÉMONSTRATION

Démonstration dans le cas où f est croissante sur un intervalle fermé $[a;b]$:
(Le résultat est admis dans le cas général)
Soit $x_0 \in [a;b]$ et h un réel tel que $x_0 + h \in [a;b]$.

- **Si $h > 0$:**



$F(x_0+h) - F(x_0)$ exprime l'aire sous la courbe de f sur $[x_0;x_0+h]$ ($h > 0$ donc $x_0 < x_0 + h$)

Or f est croissante sur $[a\,;b]$ donc $f(x_0) \leqslant f(x_0+h)$, et ainsi, on peut encadrer cette aire par celles de deux rectangles de même largeur h ($h > 0$) et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ telles que :

$$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$

Et puisque $h > 0$ ici, on a donc :

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Or f est continue en x_0, donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in [a;b]$ donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$.

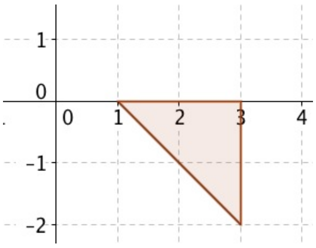
- **Si $h < 0$:** *A faire en exercice ! (peu de changement, uniquement dans l'encadrement, signe etc.)*

2) Cas d'une fonction continue négative sur $[a;b]$

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$.
On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'opposée de l'aire délimitée par la courbe C_f de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
On dit qu'il s'agit de l'**aire algébrique** de ce domaine.

EXEMPLE



Soit f la fonction définie sur $[1;3]$ par $f(x) = 1 - x$.

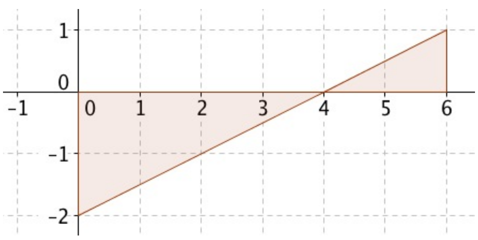
f est négative sur $[1;3]$ donc $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

3) Cas d'une fonction changeant de signe sur $[a;b]$

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue, de signe quelconque** sur $[a;b]$, avec a et b deux réels.
On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la somme des aires algébriques des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

EXEMPLE



Soit f la fonction définie sur $[0;6]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$.

f est négative sur $[0;4]$ et positive sur $[4;6]$ (on le prouve rapidement en résolvant une inéquation).

Donc $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{4 \times 2}{2} + \frac{2 \times 1}{2} = -4 + 1 = -3$.

EXERCICE

Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{4} x^3 \mathrm{d}x$

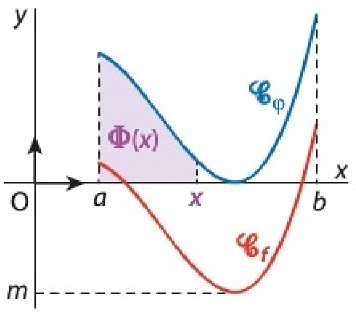
4) Retour sur un théorème

THÉORÈME

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

DÉMONSTRATION

Principe de la démonstration - EXIGIBLE BAC !!



On se place dans le cas où I est un intervalle fermé $[a;b]$.
On admet le résultat suivant : toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum et un maximum sur $[a;b]$.
Soit f une fonction continue sur I et m son minimum sur I. Alors pour tout $x \in I$, $f(x) - m \geqslant 0$.
Soit ϕ la fonction $x \mapsto f(x) - m$. ϕ est continue et positive sur I, donc il existe une fonction Φ définie sur I tel que $\forall x \in I$, $\Phi'(x) = \phi(x) = f(x) - m$.
Alors, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est dérivable sur I et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. Ainsi, F est une primitive de f sur I.

II Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

On admet que le théorème vu en **I.1) d)** peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque :

THÉORÈME — admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I.
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

REMARQUE

$F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc F est la primitive de f « qui s'annule en a ».

Conséquence pour calculer une intégrale :

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit F une primitive de f sur I, et soit a et b deux réels quelconques de I.
On appelle **intégrale de la fonction f entre a et b** le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

DÉMONSTRATION

f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I. On cherche à calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe une primitive G de f sur I telle que
$G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$.
Or $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $F(a) = G(a) + k$ d'où $k = F(a) - G(a) = F(a) - 0 = F(a)$.
Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

REMARQUES

- On écrit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,dt$.

EXEMPLES

- $\displaystyle\int_{-2}^{5} 3\,dx = [3x]_{-2}^{5} = 15 - (-6) = 21$.
- $\displaystyle\int_1^{-1} u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.
- $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^t\,dt = \left[e^t\right]_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{e}$.
- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$.
- $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\,dt = [\ln(-t)]_{-2}^{-1} = 0 - \ln 2 = -\ln 2$.
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - 0 = \frac{(\ln 2)^2}{2}$.
- $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

III Propriétés des intégrales

1) Relation de Chasles

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Pour tous réels a, b et c dans I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I.

Alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| - 2$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$.

$f(x) = x - 2 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $f(x) = -x - 2 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{5} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{0} (-x-2)\,dx + \int_0^5 (x-2)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^5 \\
&= \int_{-2}^{5} f(x)\,dx \\
&= (0 - (-2+4)) - \left(\left(\frac{25}{2} - 10\right) - 0\right) = -2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

EXERCICE

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |3x - 6|$. Calculer $\displaystyle\int_0^6 g(x)\,dx$

2) Linéarité

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b dans I, et pour tout réel λ, on a :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

DÉMONSTRATION

Soient F et G deux fonctions primitives respectives de f et de g sur I :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I donc :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = (F+G)(b)-(F+G)(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- λF est une primitive de λf sur I donc :

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = (\lambda F)(b)-(\lambda F)(a) = \lambda(F(b)-F(a)) = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXEMPLE

Soit $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer $J+K$ et $J-K$ (On admettra le résultat suivant : pour tout réel x, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$).

2) En déduire J et K.

$$J+K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

$$J-K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ainsi, on résout le système $\begin{cases} J+K = \dfrac{\pi}{6} \\ J-K = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ 2K = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8} \\ K = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$

3) Intégrales et inégalités

PROPRIÉTÉ

Positivité :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout x de $[a\ b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Ainsi, f est la dérivée de F sur I, et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.
Or si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors F est croissante sur $[a\,;b]$, et ainsi $F(a) \leqslant F(b)$.
Ainsi, $F(b)-F(a) \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

REMARQUE

On peut retrouver le résultat à l'aide de la première définition du chapitre : puisque f est positive sur $[a;b]$, on a vu que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ exprime l'aire (en u.a.) sous la courbe de f. Or une aire est positive, d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ

Ordre :
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

DÉMONSTRATION

$\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$.
Ainsi, d'après la propriété de positivité, $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
Ainsi, par linéarité de l'intégration, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

REMARQUES

- Les réciproques de ces deux propriétés sont fausses.
- Par extension, le résultat reste valable avec trois fonctions f, g et h continues sur I :

$$\text{Si } \forall x \in [a\,;b],\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \text{ alors } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXEMPLE

Soit $J = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $\forall x \in [0;2]$, $x \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant x+1$.

2) En déduire un encadrement de J.

Correction :

1) $\forall x \in [0;2]$, $x^2 \leqslant 1+x^2 \leqslant 1+2x+x^2$.
Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;2]$ donc $|x| \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant |1+x|$.
Donc $\forall x \in [0;2]$, $x \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant 1+x$.

2) On intègre les inégalités obtenues à la question précédente sur $[0;2]$:
$\int_0^2 x\,\mathrm{d}x \leqslant J \leqslant \int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x$
Donc $\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \leqslant J \leqslant \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2$.
Donc $2 \leqslant J \leqslant 4$.

IV Applications du calcul intégral

1) Aire délimitée par deux courbes

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et telles que pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
L'aire, en u.a., du domaine délimité par les courbes représentatives de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

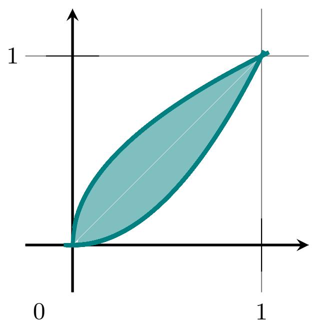
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

(Faire une figure)

DÉMONSTRATION

(Dans le cas où les fonctions f et g sont positives sur l'intervalle $[a\,;b]$)
Pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, donc l'aire entre les deux courbes est la différence entre l'aire sous la courbe de f et celle sous la courbe de g, soit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ (d'après la propriété de linéarité).

EXEMPLE



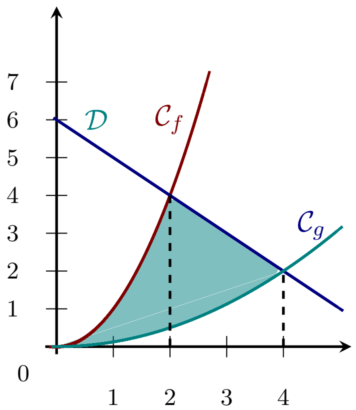
Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = x^2$.

1) Justifier brièvement que les fonctions f et g sont continues et positives sur $[0\,;1]$, puis que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

2) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de f sur $[0\,;1]$ (On admettra que F est dérivable sur $[0\,;1]$).

3) Calculer l'aire, en ua, entre les courbes de f et de g sur $[0\,;1]$.

EXERCICE



Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{8}$ dans un repère orthogonal d'unité 1 cm.
La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 6 - x$.

Démontrer que l'aire du domaine coloré est 6 cm².

2) Valeur moyenne d'une fonction

a) Définition

DÉFINITION

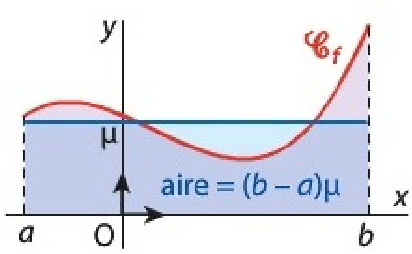
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, $a < b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre noté μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

La valeur moyenne μ est telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mu$.

Ainsi, lorsque f est positive sur $[a;b]$, le nombre μ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a;b]$ et ayant la même aire que le domaine D située sous la courbe C_f.



EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

1) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;5]$.

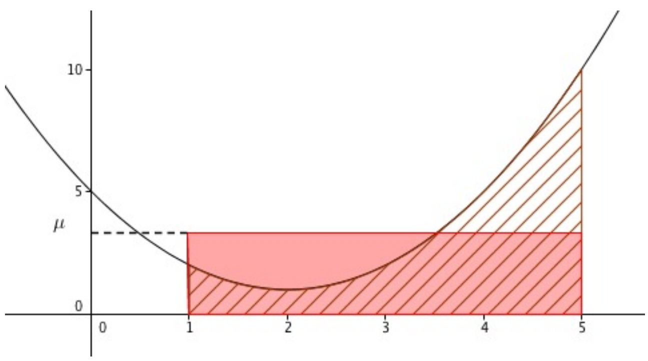
2) Tracer C_f sur $[1;5]$ et interpréter graphiquement.

Correction :

1) $\mu = \dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 (x^2-4x+5)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^5$.

Donc $\mu = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{10}{3}$. Donc $\mu = \dfrac{10}{3}$.

2) $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ donc C_f est une parabole orientée vers le bas et de sommet $A(2;1)$:



L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle rouge.

V Intégration par parties

THÉORÈME

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux réels de I. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, donc leur produit l'est également et on a $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions u et v sont dérivables donc continues sur I, ainsi que les fonctions u' et v' (par hypothèse du théorème), donc les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont également continues et admettent ainsi des primitives sur I.

Donc $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[(u'v)(x) + (uv')(x)\right]\mathrm{d}x$.

Donc $\displaystyle[(uv)(x)]_a^b = \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale).

Donc $\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$,

soit $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

EXEMPLE

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^0 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

EXERCICE

Les questions sont indépendantes.

1) Calculer $\displaystyle J = \int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer $\displaystyle K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

3) Déterminer une primitive de la fonction ln.