Terminale Spé Maths – Chapitre A-07

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

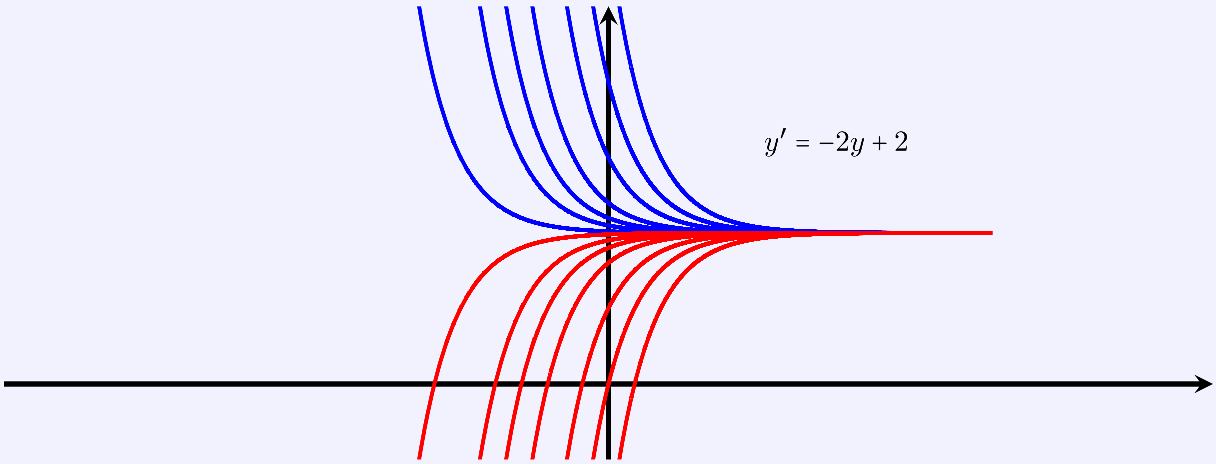

Table des matières

I Équation différentielle $y' = f$ **2**
1) Notion d'équation différentielle . . . 2
2) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle . . . 2
3) Primitive vérifiant une condition particulière . . . 3
4) Calcul de primitives . . . 4

II Équation différentielle $y' = ay$ **5**
1) Définition . . . 5
2) Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ . . . 5

III Équation différentielle $y' = ay + b$ **6**
1) Définition . . . 6
2) Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ . . . 6

IV Équation différentielle $y' = ay + f$ **7**
1) Définition . . . 7
2) Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ . . . 8

I Équation différentielle $y' = f$

1) Notion d'équation différentielle

DÉFINITION

Une équation différentielle est une équation dont **l'inconnue est une fonction** (généralement notée y) et dans laquelle peuvent apparaître la fonction, les **dérivées** de la fonction (dérivée première y', dérivée seconde y'' etc) ainsi que la **variable** x de la fonction.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ (ou sur le plus grand ensemble de définition possible) qui vérifient cette équation.

EXEMPLE

Trouver, intuitivement, au moins une fonction, solution pour chacune des équations différentielles suivantes :

1) $y' = 2x$

2) $y' = 1 + e^x$

3) $y' = y$

4) $y'' = 3x$

REMARQUE

Les notations y et y' sont des abus de langage et de notation, courants dans ce contexte, qui assimilent y à $y(x)$ et y' à $y'(x)$.
En toute rigueur, l'équation différentielle $y' = 2y$ devrait s'écrire comme l'équation (E) d'inconnue y telle que pour tout réel x (à supposer que $\mathbb{R}$ soit l'intervalle de travail), $y'(x) = 2y(x)$.

EXERCICE

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.

1) Justifier que les fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{2x+5}$ sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.

2) Proposer une autre fonction solution de l'équation différentielle (E).

2) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I.
On appelle **primitive de** f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F, dérivable sur I, telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLES

1) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 + 5x - 6$.

2) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x+3)\,e^{1-3x}$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-6x-7)\,e^{1-3x}$.

THÉORÈME — admis

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I.
- f admet une infinité de primitives sur I.
- Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x)+k$, avec k un réel. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

DÉMONSTRATION

f est continue sur I donc elle admet des primitives. Posons F_1 et F_2 deux de ses primitives.
Soit alors G la fonction définie et dérivable sur I tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$.
Ainsi, pour tout x de I, $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Donc G est constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que pour tout x de I, $G(x) = k$, soit $F_2(x) - F_1(x) = k$, d'où $F_2(x) = F_1(x) + k$.
k décrivant $\mathbb{R}$, f admet bien une infinité de primitives sur I, et ces primitives ne diffèrent que de cette constante k.

3) Primitive vérifiant une condition particulière

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque.
L'équation différentielle $(E) : y' = f$ admet une unique solution F sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION

Soit G une primitive de f sur I.
D'après le théorème précédent, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \longmapsto G(x) + k$, avec k un réel.
On cherche alors k tel que $G(x_0) + k = y_0$, ce qui équivaut à $k = y_0 - G(x_0)$.
Or k étant un réel, il suffit de fixer la valeur de k à $y_0 - G(x_0)$ pour obtenir l'unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

EXEMPLE

Soit (E) l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = -1$.

REMARQUE

Il est possible à la calculatrice de résoudre une équation différentielle avec ou sans condition :

deSolve(y'=exp(3x),x,y) ou **deSolve(y'=exp(3x) and y(0)=-1,x,y)**

4) Calcul de primitives

Fonction $f : x \mapsto \ldots$	**Une primitive** $F : x \mapsto \ldots$	**Sur l'intervalle** $I = \ldots$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0 ; +\infty[$

Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions de primitives respectives F et G, et u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I :

Fonction f **du type...**	**Une primitive** F **du type...**	**Conditions**
$f + g$	$F + G$	
kf	kF	k réel
$u'e^u$	e^u	
$2u'u$	u^2	
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u' \cos(u)$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u' \sin(u)$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$

EXERCICE

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
- $f : x \mapsto x^2(x^3 - 1)^5$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 4}$ sur $]2; +\infty[$.
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

REMARQUE

Peut-on trouver facilement une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?

II Équation différentielle $y' = ay$

1) Définition

DÉFINITION

Soit a un réel. L'équation différentielle $y' = ay$ (ou $y' - ay = 0$) est appelée **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

REMARQUE

On parle aussi d'équation différentielle **sans second membre** plutôt que d'équation différentielle **homogène**.

EXEMPLE

Les équations différentielles $y' = 5y$ et $3y' + 6y = 0$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

2) Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

THÉORÈME

Soit a un réel.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

DÉMONSTRATION

• Soit k un réel, et soit alors f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$.
La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_k'(x) = ak\,\mathrm{e}^{ax}$, donc $f_k'(x) = af_k(x)$.
Donc f_k est bien une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de (E), et montrons que f est de la forme $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$.
Posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \\ &= af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \text{ (car } f \text{ est solution de } y' = ay) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc g est une fonction constante, donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = k$, soit $f(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = k$, d'où $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$.

EXEMPLES

1) Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.

2) **a)** Résoudre l'équation différentielle $(E) : 4y' + 8y = 0$.

b) Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 2$.

III Équation différentielle $y' = ay + b$

1) Définition

DÉFINITION

Soit a un réel non nul et b un réel quelconque. L'équation différentielle $y' = ay + b$ (ou $y' - ay = b$) est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (avec second membre)**.

REMARQUE

Ici, le terme « homogène » (ou « sans second membre ») a disparu car l'équation est du type $y' - ay = b$, et le second membre est donc le réel b.

EXEMPLE

Les équations différentielles $y' = -3y + 2$ et $5y' + 7y = 1$ sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

2) Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

THÉORÈME

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = g_k(x) + g(x)$$

où g_k est solution de l'équation $y' = ay$ et g est la solution particulière **constante** de (E).

DÉMONSTRATION

Soit g une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } y' = ay + b &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = ag(x) + b \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 0 = ag(x) + b \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{b}{a} \text{ (car } a \neq 0). \end{aligned}$$

Donc l'équation $y' = ay + b$ admet bien une unique solution constante g (qui vérifie donc $g' = ag + b$).

Soit alors f_k une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de $y' = ay + b$. Alors :

$$\begin{aligned} f_k \text{ est solution de } y' = ay + b &\iff f_k' = af_k + b. \\ &\iff f_k' - g' = af_k + b - g' \\ &\iff f_k' - g' = af_k + b - ag - b \text{ (car } g' = ag + b) \\ &\iff (f_k - g)' = a(f_k - g). \\ &\iff f_k - g \text{ est solution de } y' = ay \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (f_k - g)(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) - g(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} + g(x). \end{aligned}$$

REMARQUE

On a alors démontré le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

EXEMPLE

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 3y + 2$.

Correction :

• Soit f la fonction constante solution de l'équation $(E) : y' = 3y + 2$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3f(x) + 2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 0 = 3f(x) + 2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

• Soit $(E') : y' = 3y$ l'équation homogène associée à (E).
Par théorème du cours, les solutions de (E') sont les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = k\,\mathrm{e}^{3x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

• Ainsi, par théorème du cours, les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = g_k(x) + f(x) = k\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3},\ k \in \mathbb{R}$$

EXERCICE

Soit l'équation différentielle $(E) : 5y' + 3y = -1$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E). On notera f_k les solutions de (E).

2) Étude des fonctions solutions f_k :

- **a)** Tracer à la calculatrice les courbes de quelques solutions f_k de (E).
- **b)** Conjecturer graphiquement et en fonction de k les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f_k, ainsi que leurs sens de variations.
- **c)** Démontrer ces conjectures.

IV Équation différentielle $y' = ay + f$

1) Définition

DÉFINITION

Soit a un réel non nul et soit f une fonction continue sur un intervalle I.
L'équation différentielle $y' = ay + f$ (ou $y' - ay = f$) est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

REMARQUE

Ici, le second membre n'est pas nécessairement un réel (contrairement aux équations du type $y' - ay = b$ vu précédemment) mais une fonction.

EXEMPLE

Les équations différentielles $y' = -3y + 2x$ et $5y' + 7y = \mathrm{e}^x$ sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2) Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$

PROPRIÉTÉ admise

Soit a un réel non nul et soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = f$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = g_k(x) + \phi(x)$$

où g_k est solution de l'équation $y' = ay$ et ϕ est une solution particulière de (E).

EXEMPLE

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = \mathrm{e}^x$.

1) Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = -\mathrm{e}^x$ est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$.

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

EXERCICE

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$.

1) On admet que (E) admet une solution particulière ϕ, fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = mx+p$, avec m et p des réels. Déterminer m et p.

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).