Terminale Spé Maths – Chapitre A-03

LIMITES DE FONCTIONS

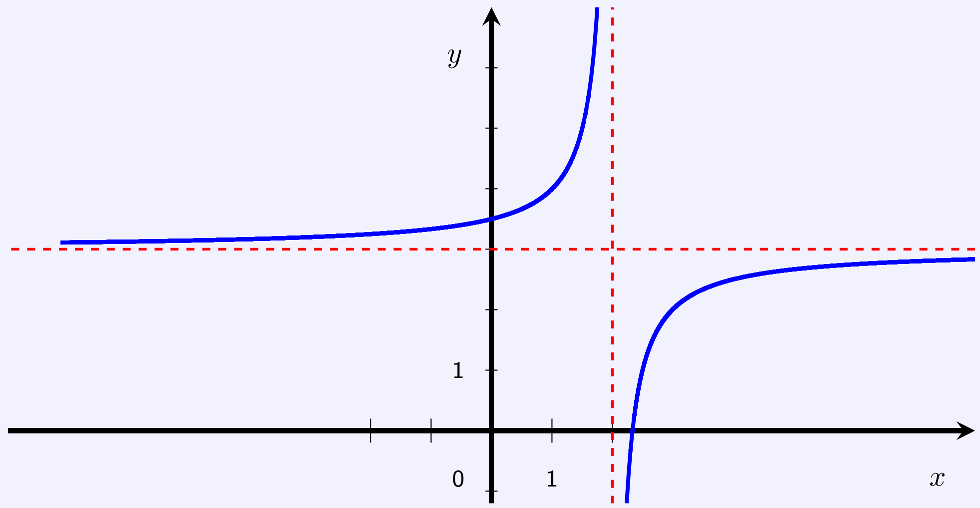


Table des matières

I Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

a Définition

DÉFINITION

• Soit ℓ un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]A\,;+\infty[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

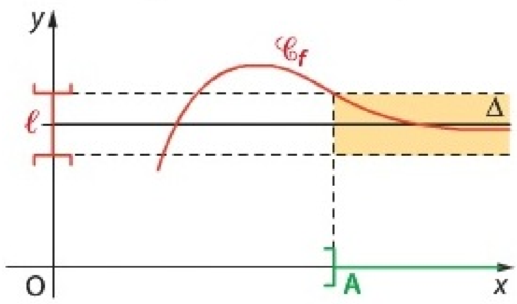
• Soit ℓ un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]-\infty\,;A[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit.
On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

REMARQUE

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > x_0$, $f(x) \in]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x < x_0$, $f(x) \in]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$.

b Interprétation graphique et asymptote horizontale

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, et aussi petit soit-il, il existe un nombre A tel que la courbe C_f restreinte à l'intervalle $]A;+\infty[$ soit située dans la partie colorée ci-dessous :



DÉFINITION

Soit f une fonction et ℓ un réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

(*Même définition en* $-\infty$)

REMARQUE

Dans ce cas, la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $f(x) - \ell$.

Dans la suite du chapitre, on admettra que les fonctions utilisées dans les définitions et propriétés sont définies au moins sur un intervalle en adéquation avec la limite étudiée.

c Fonctions de référence

PROPRIÉTÉ

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

DÉMONSTRATION

Démonstration pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$:

Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Posons alors $I =]\lambda;\mu[$ avec $\lambda < 0$ et $\mu > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} \in]\lambda;\mu[&\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{x^2} < \mu \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < \mu \text{ (car } \lambda < 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\mu} \text{ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.) \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ ou } x > \frac{1}{\sqrt{\mu}}.\end{aligned}$$

Donc pour x assez grand mais aussi pour x assez petit, I contient tous les $\dfrac{1}{x^2}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

2) Limite infinie à l'infini

a Définition

DÉFINITION

Soit f une fonction.

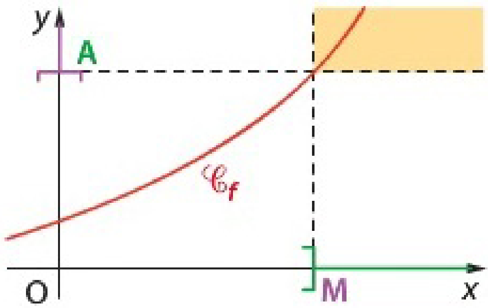
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
  On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- On définit de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

REMARQUE

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > x_0$, $f(x) > y_0$.

b Interprétation graphique

La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]M;+\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessous :



EXEMPLE

Démontrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-x^2)=-\infty$.
(Intervalle ouvert $]-\infty\,;A[$, $2x-x^2<A \Leftrightarrow 2x-x^2-A<0$, et $2x-x^2-A$ est un polynôme soit négatif sur $\mathbb{R}$ (si $\Delta\leqslant 0$), soit négatif à gauche de sa plus petite racine, et donc bien pour « x assez petit », d'où le résultat).

c Fonctions de référence

PROPRIÉTÉ

- Les fonctions $x\mapsto x$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, $x\mapsto\sqrt{x}$, $x\mapsto|x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x\mapsto x$, $x\mapsto x^3$, $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*$, n impair) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*$, n pair), $x\mapsto|x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

DÉMONSTRATION

Soit $I=]A\,;+\infty[$ avec A un réel strictement positif.
$x^2>A \Leftrightarrow |x|>\sqrt{A}$ (car la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)
$\Leftrightarrow x>\sqrt{A}$ ou $x<-\sqrt{A}$.
Donc pour $x<-\sqrt{A}$, $x^2\in I$: I contient tous les x^2 pour x assez petit, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

II Limite infinie en un réel

1) Définition

DÉFINITION

Soient f une fonction et a un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.

On définit de même $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

REMARQUE

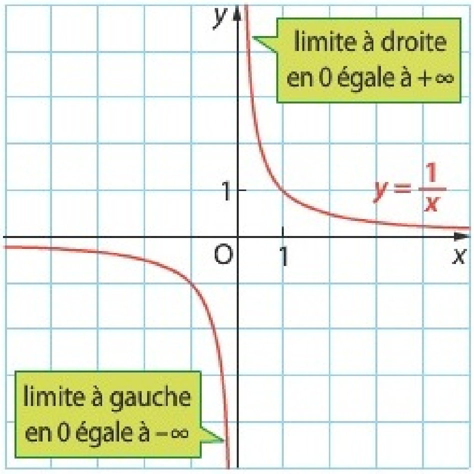
Si f est restreinte à l'intervalle $]l\,;+\infty[$, alors :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in]l; l+\epsilon[$, $f(x) > A$.

2) Limite à gauche, limite à droite

Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers un réel a, il faut distinguer le cas où x tend vers a « par la gauche » du cas où x tend vers a « par la droite » (ce qui n'est bien sûr pas le cas lorsque x tend vers $+\infty$ (c'est nécessairement « par la gauche ») ou lorsque x tend vers $-\infty$ (c'est nécessairement « vers la droite »)).

EXEMPLE

Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.



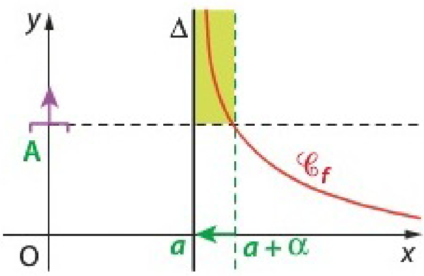
On remarque que l'on ne peut pas conclure directement sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 sans distinguer deux cas : x positif ou x négatif.

Cas où $x > 0$:
On dit que **la limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Cas où $x < 0$:
On dit que **la limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

3) Interprétation graphique et asymptote verticale

La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]l\,; l+\epsilon[$ est dans la partie colorée ci-dessous :



DÉFINITION

Soient f une fonction et a un réel.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f.

REMARQUE

Ce résultat reste valable si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$, ou si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$.

4) Fonctions de référence

PROPRIÉTÉ

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite $+\infty$ en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (« à gauche ») et $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures (« à droite »)

Faire écrire ces résultats avec la notation lim.

DÉMONSTRATION

Soit $I =]A;+\infty[$ avec A un réel.
Si $A \leqslant 0$, alors le résultat est immédiat car pour tout réel x non nul, $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.
Supposons maintenant que A est strictement positif.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} \in I &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > A \\
&\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A} \text{ (la fonction inverse étant strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.) \\
&\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ (la fonction racine carrée étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{A}} < x < \frac{1}{\sqrt{A}}
\end{aligned}$$

Donc pour x assez proche de 0, $\dfrac{1}{x^2} \in I$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

III Opérations sur les limites

1) Somme, produit, quotient

PROPRIÉTÉ **admise**

Tableau des règles opératoires :

Les tableaux du chapitre « *Limites de suites* » sont à reprendre, en remplaçant les suites u et v par les fonctions f et g définies au voisinage d'un réel a ou de $+\infty$ ou $-\infty$.

2) Exemple général

EXERCICE

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à C_f.
3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f ainsi que ses asymptotes.

3) Quelques calculs de limites

EXERCICE

Déterminer les limites suivantes et en donner une interprétation graphique lorsque cela est possible :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^2 - 5x + 1)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2 - 5x + 1)$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{x+1}{x+2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2-4}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

4) Limite d'une fonction composée

DÉFINITION

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telle que, pour tout $x \in J$, $g(x) \in I$.
On appelle fonction composée $f \circ g$ la fonction définie sur J telle que pour tout x de J, on a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

THÉORÈME — admis

On reprend les notations de la définition précédente.
Soient a, b et L des réels ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = L$

EXEMPLES

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$?
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$?

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{4x-5}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variations de f.

IV Limites et comparaison

1) Théorème de comparaison

THÉORÈME

Théorème de comparaison :
Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec A un réel.
- Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

REMARQUE

Ce théorème reste valable en $-\infty$, en un réel a, ou si l'inégalité n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

DÉMONSTRATION

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ $(M \in \mathbb{R})$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand dans I.
Or pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$. Ainsi, l'intervalle $]M\,;+\infty[$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans I. C'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Le deuxième point se démontre de manière analogue.

EXEMPLE

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $x \mapsto \cos x - x$.

2) Théorème des gendarmes

THÉORÈME admis

Théorème des gendarmes :
Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), avec A un réel.
Soit ℓ un réel.
Si pour tout x de I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

REMARQUE

Ce théorème reste valable en $-\infty$, en un réel a ou si l'encadrement n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer de même la limite de f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de f en 0.

V Limites de la fonction exp

1) Limites en infini

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

DÉMONSTRATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$.
Donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante $[0; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

f admet sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ soit $e^x > x$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

DÉMONSTRATION

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.
Donc par inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

2) Une limite particulière

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DÉMONSTRATION

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x+0} - e^0}{x - 0}$.
On reconnait la limite, quand x tend vers 0, du taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et $0 + x$; or la fonction exp est dérivable en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$.

3) Croissances comparées

PROPRIÉTÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(x^n\,\mathrm{e}^x\right) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

DÉMONSTRATION

Démonstration de la 1ère limite dans le cas où $n = 1$:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - x$.
Or, pour tout réel x, $e^x > x$ (vu au-dessus), donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.
Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$, d'où $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, soit $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ (car $x > 0$).
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démonstration de la 1ère limite dans le cas où $n \geqslant 2$:
Pour tout réel x non nul, on a $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ (car $n > 0$) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, et comme $\dfrac{1}{n} > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, donc par composition de nouveau, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Démonstration de la 2ème limite dans le cas où $n = 1$:
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x\,\mathrm{e}^x = -(-x) \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = -\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{-x}}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (par propriété), donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x} = +\infty$, donc par inverse, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.

Les autres limites sont admises.

EXERCICE

Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - \mathrm{e}^x\right)$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(1 - x^3\,\mathrm{e}^x\right)$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(2x\,\mathrm{e}^{5x}\right)$