Terminale Spé Maths – Chapitre P-02

DÉNOMBREMENT

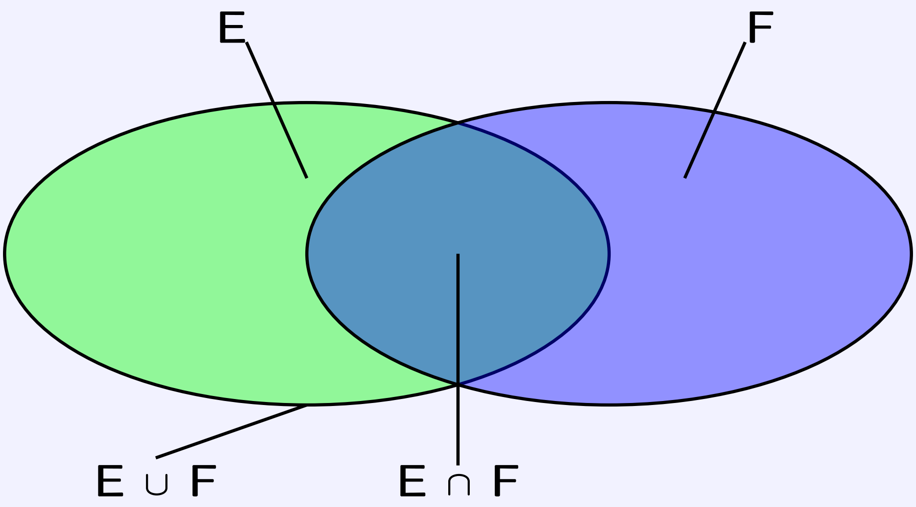


Table des matières

I Principes additif et multiplicatif

1) Principe additif : réunion d'ensembles disjoints

DÉFINITION

Soit E un ensemble **fini**.
On appelle **cardinal** de E, l'entier naturel noté $\text{Card}(E)$ égal au nombre d'éléments de E.

EXEMPLE

Soit $E = \{-4,15 \ ; \ -2 \ ; \ 0 \ ; \ 1,05 \ ; \ 3\}$. Alors $\text{Card}(E) = 5$.

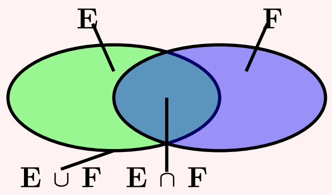
REMARQUES

- Si E est l'ensemble vide, alors $\text{Card}(E) = 0$.
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble des réels de l'intervalle $[0;1]$ etc.

PROPRIÉTÉ admise

Soient E et F deux ensembles finis. On a alors :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$$



DÉFINITION

Soient E et F deux ensembles finis.
On dit que E et F sont **disjoints** si et seulement si $E \cap F = \varnothing$.

PROPRIÉTÉ admise

Soient E et F deux ensembles finis et disjoints. Alors :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

REMARQUE

On peut généraliser la propriété précédente dans le cas de n ensembles finis et deux à deux disjoints A_1, A_2, ..., A_n :
$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$$

EXEMPLES

Soient $E = \{a;b;c\}$ et $F = \{d;e\}$.

1. E et F sont-ils disjoints ? En déduire $E \cap F$.
2. Écrire $E \cup F$ et préciser $\text{Card}(E \cup F)$.

PROPRIÉTÉ

Soient A une partie d'un ensemble E fini, et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

DÉMONSTRATION

$\overline{A}$ est le complémentaire de A, donc $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$, et ainsi $\mathrm{Card}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{Card}(E)$.
Donc $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A}) - \mathrm{Card}(A \cap \overline{A}) = \mathrm{Card}(E)$.
Donc $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E)$, d'où finalement $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

2) Principe multiplicatif : produit cartésien

DÉFINITION

Soient E et F deux ensembles **non vides**.
On appelle produit cartésien de E par F l'ensemble noté $E \times F$ (« E croix F ») constitué des couples $(x\,;y)$, où x est un élément de E et y un élément de F.
On le note $E \times F = \{(x\,;y), x \in E, y \in F\}$

REMARQUES

- On peut généraliser cette définition à plus de deux ensembles non vides.
- Le produit cartésien de E par E est noté E^2.

EXEMPLES

- $\mathbb{R}^2$ pour les coordonnées d'un point du plan, $\mathbb{R}^3$ pour celles d'un point de l'espace.
- On lance deux dés : un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, et un dé à 4 faces colorées rouge, vert, bleu, jaune : $D_1 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;5\}$ et $D_2 = \{rouge\,;vert\,;bleu\,;jaune\}$.
Un lancer possible est alors un élément de $D_1 \times D_2$, par exemple $(4\,;vert)$.

EXERCICE

Soient $E = \{a\,;b\,;c\}$ et $F = \{1\,;2\}$. Déterminer l'ensemble $E \times F$, puis l'ensemble $F \times E$.

PROPRIÉTÉ

Soient E et F deux ensembles finis et non vides. Alors :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$$

DÉMONSTRATION

Chaque élément de E permet de générer autant de couples de $E \times F$ que d'éléments de F.
(*Faire un arbre.*) D'où le résultat.

II k–uplets ou k–listes d'un ensemble

DÉFINITION

Soit E un ensemble non vide et k un entier naturel non nul.
On appelle **k–uplet** ou **k–liste** de E un élément de E^k.

REMARQUES

- Un 2–uplet est un **couple** et un 3–uplet est un **triplet**.
- Un k–uplet de E est une liste **ordonnée** d'éléments de E. Par exemple, le triplet $(1;2;3)$ n'est pas égal au triplet $(2;1;3)$.

EXEMPLE

- $(-2;3)$ est un couple d'éléments de $\mathbb{R}$.
- $(f;u;t;u;r)$ est un 5–uplet d'éléments de l'ensemble des 26 lettres $E = \{a;b;...;z\}$.

PROPRIÉTÉ admise

Soit E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul. Alors :

$$\text{Card}(E^k) = \text{Card}(E)^k$$

Autrement dit, le nombre de k–uplets d'un ensemble E est $\text{Card}(E)^k$.

EXEMPLE

Le digicode d'un immeuble est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.
Combien y-a-t-il de codes possibles ?

III Arrangements et permutations

1) Factorielle d'un entier naturel

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **factorielle** n, l'entier naturel noté $n!$ (« factorielle n ») défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

REMARQUE

Par convention, on admet que $0! = 1$.

EXEMPLES

- Calculer $4!$
- Calculer astucieusement $\dfrac{7!}{5!}$.

2) Permutations d'un ensemble

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble fini non vide à n éléments.
On appelle **permutation** de E tout n−uplet d'éléments **distincts** de E.

EXEMPLES

• Si $E = \{a\,;b\,;c\}$, alors les triplets $(a\,;b\,;c)$ et $(b\,;a\,;c)$ sont deux permutations (distinctes) de E.
• On considère un jeu de 32 cartes. Alors tout mélange de ce jeu est une permutation de l'ensemble des cartes du jeu.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

DÉMONSTRATION

Il y a n choix pour le premier élément de la permutation, puis $n-1$ choix restants pour le deuxième élément, et ainsi de suite, jusqu'à 1 choix restant pour le dernier élément.

EXEMPLES

• Dans le premier exemple, il y a donc $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations possibles de E.
• Dans le deuxième exemple, il y a donc $32! \approx 2,6 \times 10^{35}$ mélanges de jeu possibles.

3) Arrangements d'un ensemble

DÉFINITION

Soient n un entier naturel non nul, E un ensemble fini non vide à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle **arrangement** de k éléments de E tout k−uplet d'éléments **distincts** de E.

EXEMPLES

• Soit $E = \{a\,;b\,;c\}$. Alors les couples $(a\,;b)$ et $(c\,;a)$ sont deux arrangements possibles de 2 éléments de E. Le couple $(a\,;a)$ n'est pas un arrangement car ses éléments ne sont pas distincts.
• Une course a lieu entre 20 compétiteurs. Le podium à l'issue de la course est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble des 20 compétiteurs.

REMARQUE

Une **permutation** de E est donc un arrangement de n éléments de E.

PROPRIÉTÉ

Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n éléments est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

DÉMONSTRATION

- Il y a n choix pour le premier élément de l'arrangement, puis $n-1$ choix restants pour le deuxième élément de l'arrangement, et ainsi de suite, jusqu'à $n-(k-1)$ choix restants pour le k-ieme.
- $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!} = n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)$.

EXEMPLES

- Dans le premier exemple, il y a donc $\dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3\times 2}{1} = 6$ arrangements possibles.
- Dans le $2^{\text{ème}}$ exemple, il y a donc $\dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20\times 19\times 18\times 17!}{17!} = 20\times 19\times 18 = 6840$ podium possibles.

IV Combinaisons

1) Parties d'un ensemble

DÉFINITION

Une **partie** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E, c'est-à-dire un ensemble constitué d'éléments de E.

EXEMPLE

Si $E = \{1;2;3;4;5;6\}$, alors les ensembles $\{2;5\}$, $\{3\}$, E et $\varnothing$ sont des parties de E.

REMARQUE

Attention : ne pas confondre une **partie** d'un ensemble avec un **k-uplet** de cet ensemble.
Par exemple, $\{1;2\}$ est une partie à deux éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$, et on a $\{1;2\} = \{2;1\}$.
En revanche, $(1;2)$ est un 2-uplet (couple) de l'ensemble $\mathbb{N}$ et $(1;2) \neq (2;1)$.

THÉORÈME

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini à n éléments.
Alors le nombre de parties de E est 2^n.

DÉMONSTRATION

Soit E' une partie de E.
Pour chaque élément de E, il y a deux choix possibles : il est dans E', ou il ne l'est pas.
Comme E possède n éléments, cela fait 2^n possibilités pour créer E'. *(Faire un arbre)*

REMARQUE

Ce résultat, 2^n, est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}$.
Par exemple, si $E = \{1;2;3;4;5;6\}$, alors on peut faire correspondre la partie $\{2;5\}$ au 6-uplet $(0;1;0;0;1;0)$.

2) Combinaisons

DÉFINITION

Soit n un entier naturel.
Soit E un ensemble fini à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E à k éléments.
Le nombre de combinaison de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

PROPRIÉTÉ

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

DÉMONSTRATION

On a vu que le nombre de k-uplets d'éléments tous distincts d'un ensemble à n éléments est

$$N = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$$

Or ce calcul tient compte de l'ordre des éléments dans le k-uplet, ce qui ne doit pas être le cas d'une partie (et donc d'une combinaison).

Plus précisément, on a compté à chaque fois toutes les permutations possibles de ces k éléments, et on a vu qu'il y avait $k!$ permutations possibles.

Ainsi, pour déterminer le nombre de combinaisons de k parmi n, il faut donc de diviser N par le nombre de permutations.

On obtient alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

EXEMPLE

Au loto, on choisit 5 numéros entre 1 et 50. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

Il s'agit de compter le nombre de combinaisons possibles de 5 éléments parmi 50, soit $\binom{50}{5}$:

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{(50-5)! \times 5!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45!}{45! \times 5!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,118\,760$$

Il y a donc 2 118 760 tirages possibles au loto.

EXERCICE

Pour gagner à l'Euromillions, il faut deviner les 5 bons numéros parmi 50 nombres, et les 2 étoiles gagnantes parmi 12 étoiles. Quelle est la probabilité de gagner le premier prix à l'Euromillions ?

Réponse : 139 838 160 tirages possibles, soit une probabilité de gagner de $7,15 \times 10^{-9}$.

3) Propriétés des combinaisons

PROPRIÉTÉS

- Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Soit n un entier naturel. Alors :

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1$$

- Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors la **relation de Pascal** est :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

DÉMONSTRATION

On utilise la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour obtenir ses résultats. *(à faire en exercices)*

EXERCICE

Retrouver ces résultats sans effectuer de calculs mais à l'aide de dénombrements.

4) Triangle de Pascal

Le **triangle de Pascal** permet d'obtenir rapidement les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour les premières valeurs de k et de n :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

REMARQUE

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

La formule ainsi obtenue est appelée la **formule du binôme de Newton** et les entiers $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.